Segundo semestre 2022

3. Considere las soluciones de la siguiente ecuación en los números complejos:

$$z^3 = i$$

Entonces:

(A) Las soluciones son simétricas respecto al eje vertical (eje imaginario).
(B) El producto de las soluciones es 0.
(C) Las soluciones son simétricas respecto al eje horizontal (eje real).
(D) La suma de las soluciones es -1.
(E) Hay exactamente dos soluciones en el eje imaginario.

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z^3 = i$$

$$(\rho e^{i\theta})^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\rho^3 e^{i3\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

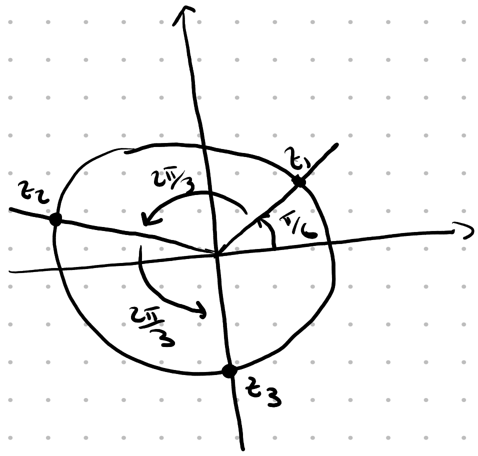
$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k \end{cases}$$

$\underline{k=0}$: $e^{i\frac{\pi}{6}} = z_1$

$\underline{k=1}$: $e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = z_2$

$\underline{k=2}$: $e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$\underline{k=3}$: $e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ y acá se empiezan a repetir



$\Rightarrow$ las soluciones son simétricas respecto al eje vertical

Practico 5

4. *a*) Probar que para $x \to +\infty$ se cumple que

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x} \sim \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

b) Probar que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ converge mientras que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x}\right) dx$ diverge.

c) ¿Por qué no aplica el criterio del equivalente en este caso?

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x}}{\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\underbrace{x}_{=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sin(x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 + \underbrace{\sin(x)}_{\text{acotada}} \frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$$

$$= 1$$

2. Sea $A \subset \mathbb{C}$ el conjunto de los números $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

$$\begin{cases} z^5 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \\ z + \bar{z} > 0 \end{cases}$$

Solo una de las siguientes afirmaciones sobre el conjunto A es correcta. Indique cuál:

(A) A tiene exactamente cinco elementos distintos.

(B) A es simétrico respecto al eje real.

(C) A es simétrico respecto al eje imaginario.

(D) A tiene exactamente cuatro elementos distintos.

(E) A tiene exactamente tres elementos distintos.

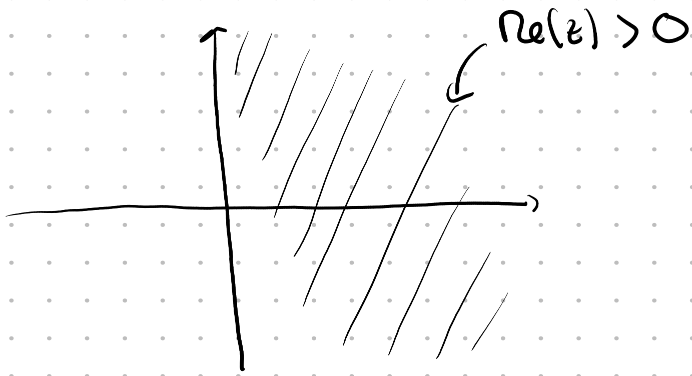
$$\frac{\rho e^{i\theta}}{r e^{i\varphi}} = \frac{\rho}{r} e^{i(\theta - \varphi)}$$

$*$ $z + \bar{z} > 0$

$$\left.\begin{array}{l} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{array}\right\} \quad z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$$

$$z + \bar{z} > 0 \iff a > 0$$

$$\iff \mathrm{Re}(z) > 0$$



$*$ $z^5 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

$$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{3 + i\sqrt{3} + i\sqrt{3} - 1}{3 + \cancel{i\sqrt{3}} - \cancel{i\sqrt{3}} + 1}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4}$$

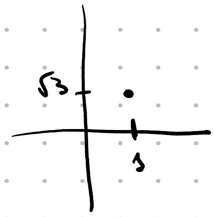
$$= \frac{2(1+\sqrt{3}i)}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$a+bi \rightsquigarrow |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad = \frac{1}{2}(\underline{1+\sqrt{3}i})$

vamos a escribir $\underline{1+\sqrt{3}i}$ es polares

$\left.\begin{array}{l} \to |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2 \\ \to \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \end{array}\right] \quad 1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$



	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X

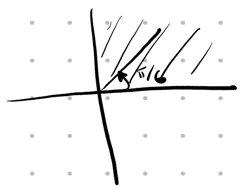
conclusión: $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) = \frac{1}{2}2e^{i\pi/3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

<u>otra forma</u>

* $\sqrt{3}+i$ en polares

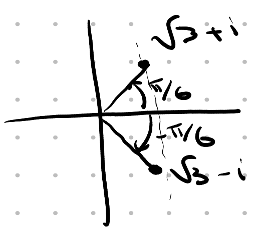
$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$

$\arg(\sqrt{3}+i) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$ ✓



$\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$

* $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\pi/6}$



entonces $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{2e^{i\pi/6}}{2e^{-i\pi/6}} = e^{i\pi/3}$

$$z^5 = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$$

$$(\rho e^{i\theta})^5 = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \rho^5 e^{i5\theta} = e^{i\pi/3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^5 = 1 \\ 5\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^5 = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \leftarrow \\ z+\bar{z} > 0 \Leftrightarrow Re(z) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}k \end{cases}$$

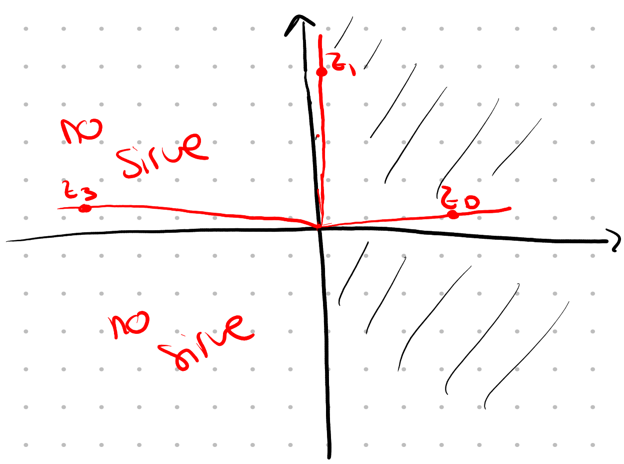
$\underline{k=0}$: $z_0 = e^{i\pi/15}$ → parte real positiva ✓

$\underline{k=1}$: $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{15}}$ $0 < \frac{7\pi}{15} < \frac{7\pi}{14} = \frac{\pi}{2}$ → parte real positiva ✓

$\underline{k=2}$: $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{15}+\frac{4\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{13\pi}{15}}$ → parte real negativa X

$\underline{k=3}$: $z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{15}+\frac{6\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{19\pi}{15}}$ $\pi < \frac{19\pi}{15} < \frac{3\pi}{2}$ → parte real negativa X

$\underline{k=4}$: $z_4 = e^{i\left(\frac{\pi}{15}+\frac{8\pi}{5}\right)} = e^{i\frac{25\pi}{15}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$ → parte real positiva ✓



4. Considere la siguiente integral impropia:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{\log(x)\,(1+x\log^{\alpha}(x))}dx$$

Entonces:

(A) La integral es divergente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(B) La integral es convergente si y solo si $\alpha < 1$.
(C) La integral es convergente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(D) La integral es convergente si y solo si $\alpha > 0$.
(E) La integral es convergente si y solo si $\alpha > 1$.

$$\frac{1+e^{-x}}{\log(x)(1+x\log^{\alpha}(x))} \sim \frac{1}{\log(x)+x\log^{\alpha+1}(x)} \sim \frac{1}{x\log^{\alpha+1}(x)}$$

$$\int_2^{a} \frac{1}{x\log^{\alpha+1}(x)}dx = \int_{\log(2)}^{\log(a)} \frac{1}{u^{\alpha+1}}du$$

$u = \log(x)$

$du = \frac{1}{x}dx$

Caso 1: $\alpha = 0$ Diverge

$$\int_{\log(2)}^{\log(a)} \frac{1}{u}du = \log(u)\Big|_{\log(2)}^{\log(a)}$$

$$= \log(\log(a)) - \log(\log(2))$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log(x)}dx = \lim_{a\to+\infty} \log(\log(a)) - \log(\log(2)) = +\infty$$

Caso 2: $\alpha \neq 0$

$$\int_{\log(2)}^{\log(a)} \frac{1}{u^{\alpha+1}}du = \int_{\log(2)}^{\log(a)} u^{-(\alpha+1)}du$$

$$= \frac{1}{-(\alpha+1)+1}\, u^{-(\alpha+1)+1}\Big|_{\log(2)}^{\log(a)}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} u^{-\alpha} \Big|_{\log(2)}^{\log(a)}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{u^{\alpha}} \Big|_{\log(2)}^{\log(a)}$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\log(a)^{\alpha}} - \frac{1}{\log(2)^{\alpha}} \right)$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^{\alpha+1}(x)}\,dx = \lim_{a \to +\infty} -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\log(a)^{\alpha}} - \frac{1}{\log(2)^{\alpha}} \right)$$

si $\alpha > 0$ converge

si $\alpha < 0$ diverge

$$\frac{1}{(\log(a))^{-1}} = \log(a)$$

5. Recuerde que decimos que L es un punto de aglomeración de la sucesión a_n si existe una subsucesión de a_n que converge a L.

Considere la sucesión $a_n = \dfrac{n}{2n+1}\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Entonces:

(A) a_n tiene exactamente 3 puntos de aglomeración, pero no tiene límite.

(B) a_n tiene exactamente 2 puntos de aglomeración, pero no tiene límite.

(C) a_n tiene exactamente 1 punto de aglomeración, pero no tiene límite.

(D) a_n tiene límite finito.

(E) a_n tiende a $+\infty$.

$$a_{2n} = \frac{2n}{4n+1}\sin\left(\frac{2n\pi}{2}\right) = \frac{2n}{4n+1}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} = 0$$

a_{2n} es constante igual a 0

$\Rightarrow \lim a_{2n} = 0$

$\Rightarrow$ 0 es punto de aglomeración de a_n

$\underline{a_{4n}}$ es subsucesión de a_{2n} $\qquad a_{\underbrace{4n+2}_{\text{par}}} \to 0$

$\Rightarrow \lim a_{4n} = 0$

$$a_n = \frac{n}{2n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(1+4n)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 4n\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Big\| \quad (3+4n)\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 4n\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\underline{a_{1+4n}} = \frac{1+4n}{2(1+4n)+1}\sin\left((1+4n)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1+4n}{2(1+4n)+1}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}_{=1}$$

$$= \frac{1+4n}{2+8n+1}$$

$$= \frac{1+4n}{3+8n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{1+4n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+4n}{3+8n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{8n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ también es punto de aglomeración

$$\underline{a_{3+4n}} = \frac{3+4n}{2(3+4n)+1}\sin\left((3+4n)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{3+4n}{7+8n}\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)}_{=-1}$$

$$= -\frac{3+4n}{7+8n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{3+4n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{3+4n}{7+8n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{4n}{8n} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}$ es otro punto de aglomeración