Series de términos positivos

$\sum a_n$ con $a_n \geq 0$ para todo n

Criterio de comparación:

$\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos tal que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n \leq b_n \text{ para todo } n \geq n_0$$

Entonces

- Si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge
- Si $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum b_n$ diverge

Con quien podemos comparar?

serie armónica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$

- si $\alpha > 1$ converge $\rightsquigarrow \sum \frac{1}{n^2}$ converge
- si $\alpha \leq 1$ diverge $\rightsquigarrow \sum \frac{1}{n}$ diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

2. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio de comparación.

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n+1}}$$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{n^n} \leq \dfrac{1}{n^2} \text{ para todo } n \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \text{ converge}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n+1}}}$

queremos ver si

$$\frac{1}{e^{\sqrt{n+1}}} \leq \frac{1}{n^2} \text{ a partir de algún momento}$$

$$\frac{1}{e^{\sqrt{n+1}}} \overset{?}{\leq} \frac{1}{n^2} \iff \underbrace{1 \overset{?}{\leq} \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{n^2}}$$

para ver si esto ocurre a partir de algún no podemos calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{n^2} \underset{u=\sqrt{n}}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{u^4} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{4u^3}$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{24u}$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{24}$$

$$= \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{n^2} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{n^2} \text{ a partir de algún momento}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e^{\sqrt{n+1}}} \leq \frac{1}{n^2} \text{ a partir de algún momento}$$

entonces como $\sum \frac{1}{n^2}$ converge tenemos que $\sum \frac{1}{e^{\sqrt{n+1}}}$ converge

Criterio de equivalente

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de terminos positivos

* si $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ las dos series tienen el mismo comportamiento

"$a_n \sim b_n$"

* si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ → $\sum b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge
→ $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum b_n$ diverge

"$a_n \leq b_n$"

3. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio del equivalente.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)-\log(n)}{10n+1}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)-\log(n)}{10n+1}$

$$\frac{\log(n+1)-\log(n)}{10n+1} = \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{10n+1} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{10n+1}$$

Taylor de $\log(1+x)$ en 0:

$$\log(1+x) = \underbrace{\log(1)}_{=0} + x - \frac{1}{2!}x^2 + \ldots$$

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

Si $x \to 0$, $\log(1+x) \sim x$

$$\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{10n+1} \sim \frac{1/n}{10n+1} \sim \frac{1/n}{10n} \sim \frac{1}{10n^2}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\frac{\log(1+1/n)}{10n+1} \sim \frac{1}{10n^2}$$

$$\sum \frac{1}{10n^2} = \frac{1}{10} \underbrace{\sum \frac{1}{n^2}}_{\text{converge}}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{\log(1+1/n)}{10n+1} \text{ converge}$$

Criterio del cociente

$\sum a_n$ serie de términos positivos tal que existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

* si $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
* si $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
* si $L = 1 \Rightarrow$??? el criterio no decide

4. Usar el criterio del cociente para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(n+1)!}^{n!\cdot(n+1)}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\cdot\cancel{(n+1)}}{(n+1)^{n\cancel{+1}}} \frac{n^n}{\cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad 1^\infty$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n\left(-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}\right)$$
$$= -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$\sim -\frac{1}{n}$$

Entonces

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow \sum a_n$ converge.

Criterio de la raíz

$\sum a_n$ serie de términos positivos tal que existe

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = L$$

- si $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- si $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
- si $L = 1 \Rightarrow$??? el criterio no decide

5. Usar el criterio de la raíz para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

$$a_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} (2n-1)^{1/n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} (2n-1)^{1/n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} e^{\ln((2n-1)^{1/n})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(2n-1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(2n-1)}{n}}}_{=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim \frac{\ln(2n-1)}{n} = \lim \frac{\frac{2}{2n-1}}{1} = \lim \frac{2}{2n-1} = 0$$

Entonces

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

$\Rightarrow \sum a_n$ converge.

8. **Estudiar la convergencia de las siguientes series:**

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

Criterio de la raíz

$$a_n = \frac{n^3}{e^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{e}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} n^{3/n}$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} n^{3/n}$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n^{3/n})}$$

$$= \frac{1}{e} \underbrace{\lim_{n\to\infty} e^{\frac{3\ln(n)}{n} \to 0}}_{=1}$$

$$= \frac{1}{e}$$

entonces $\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e} < 1$

$\Rightarrow \sum a_n$ converge

criterio del cociente:

$$a_n = \frac{n^3}{e^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}}{\frac{n^3}{e^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \frac{(n+1)^3}{n^3}$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3$$

$$= \frac{1}{e} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}_{=1}$$

$$= \frac{1}{e}$$

entonces $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1$

$\Rightarrow \sum a_n$ converge