Solución del examen - 24/02/25

Ejercicio 1. a) Dado el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Para verificar que $\mathbf{x} = [0, 1, 2]^t$ es solución, sustituimos en el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(0) - 1(1) + 1(2) \\ -1(0) + 2(1) - 1(2) \\ 1(0) - 1(1) + 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Entonces, $\mathbf{x} = [0, 1, 2]^t$ es solución del sistema.

b) Primero, descomponemos A en $A = D - E - F$, donde

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La iteración de Gauss-Seidel se escribe

$$\mathbf{x}^{k+1} = (D - E)^{-1} F \mathbf{x}^k + (D - E)^{-1} \mathbf{b} = Q\mathbf{x}^k + \mathbf{r}.$$

Dado $\mathbf{x}^0 = [0, 0, 1]^t$, calculamos $F\mathbf{x}^0$,

$$F\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con esto obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= (D - E)^{-1}[-1, 1, 0]^t + (D - E)^{-1}[1, 0, 3]^t \\ &= (D - E)^{-1}([-1, 1, 0]^t + [1, 0, 3]^t) \\ &= (D - E)^{-1}[0, 1, 3]^t. \end{aligned}$$

Entonces,

$$(D - E)\mathbf{x}^1 = [0, 1, 3]^t.$$

Como

$$D - E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

haciendo una sustitución hacia adelante, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2\mathbf{x}_1^1 = 0, \\ -\mathbf{x}_1^1 + 2\mathbf{x}_2^1 = 1, \\ \mathbf{x}_1^1 - \mathbf{x}_2^1 + 2\mathbf{x}_3^1 = 3, \end{cases}$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{x}_1^1 = 0, \quad \mathbf{x}_2^1 = 1/2, \quad \mathbf{x}_3^1 = 7/4.$$

Entonces el vector $\mathbf{x}^1$ es,

$$\mathbf{x}^1 = \left[0, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right]^t.$$

c) La convergencia del método de Gauss-Seidel depende del radio espectral de la matriz de iteración Q. Si $\rho(Q) < 1$, el método converge. Usando que

$$D - E = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

Obtenemos,

$$(D-E)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$Q = (D-E)^{-1}F = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & -1/8 & 3/8 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovalores de Q. Resolviendo $\det(Q - \lambda I) = 0$, obtenemos:

$$\det(Q - \lambda I) = -\lambda\left((1/4 - \lambda)(3/8 - \lambda) + 1/32\right) = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5/16 + i\sqrt{7}/16$, $\lambda_3 = 5/16 - i\sqrt{7}/16$. Entonces, $|\lambda_1| = 0$ y $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{2}/4$. En particular, $\rho(Q) < 1$ y el método converge.

Ejercicio 2. a) La interpolación de Hermite consiste en construir un polinomio interpolante cúbico en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ que cumpla $p(x_i) = f(x_i)$ y $p'(x_i) = f'(x_i)$ para todo $i = 0, \ldots n$. Por lo tanto, para esta interpolación, los coeficientes d_i en la fórmula (1) descrita en la letra del examen están dados por $d_i = f'(x_i)$, $i = 0, \ldots n$.

Para calcular la interpolación, observamos que

$$\begin{aligned} y_0 &= f(0) = 0, \\ y_1 &= f(1) = -7, \\ y_2 &= f(2) = -16. \end{aligned}$$

La derivada de f es $f'(x) = 4x^3 - 16x$. Entonces:

$$\begin{aligned} d_0 &= f'(0) = 0, \\ d_1 &= f'(1) = -12, \\ d_2 &= f'(2) = 0. \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en

$$\begin{aligned} p(x) = &\left(\frac{3h_i s^2 - 2s^3}{h_i^3}\right) y_{i+1} + \left(\frac{h_i^3 - 3h_i s^2 + 2s^3}{h_i^3}\right) y_i \\ &+ \frac{s^2(s-h_i)}{h_i^2} d_{i+1} + \frac{s(s-h_i)^2}{h_i^2} d_i, \end{aligned}$$

donde $h_i := x_{i+1} - x_i = 1$ y $s := x - x_i$, obtenemos

$$p(x) = \begin{cases} -7\left(3x^2 - 2x^3\right) - 12x^2(x-1) = x^2(2x-9), & x \in [0,1], \\ 6x^3 - 21x^2 + 12x - 4, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

b) La interpolación con splines cúbicas consiste en construir un polinomio cúbico en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ que interpola los valores deseados y de forma tal que la función interpolante, así como su primer y segunda derivada, sean continuas en todo el intervalo $[x_0, x_n]$. En este caso, los coeficientes d_i se determinan resolviendo un sistema de ecuaciones lineales que surge de imponer de estas condiciones para todo x_i, con $i \in \{1, \dots n-1\}$. Imponer la continuidad de las derivadas segundas en los nodos interiores da lugar a $n-1$ ecuaciones lineales para los coeficientes $d_0, \dots, d_n$, por lo que se deben agregar dos condiciones adicionales para tener un sistema con solución única. Esto da lugar a diferentes tipos de spline.

c) Como queremos una spline completa, tenemos que $d_0 = p_0'(0) = 0$ y $p_{n-1}'(2) = d_2 = 0$.

Debemos hallar la condición para d_1 de forma que asegure la continuidad de la derivada segunda en el punto $x = 1$. En el intervalo $[0,1]$, se cumple que

$$p_0(x) = -7(3x^2 - 2x^3) + x^2(x-1)d_1.$$

La derivada segunda resulta,

$$p_0''(x) = -7(6 - 12x) + (6x - 2)d_1 \implies p_0''(1) = 42 + 4d_1.$$

En el intervalo $[1,2]$, tenemos

$$p_1(x) = -16(3(x-1)^2 - 2(x-1)^3) - 7(1 - 3(x-1)^2 + 2(x-1)^3) + (x-1)(x-2)^2 d_1,$$

y su derivada segunda es

$$p_1''(x) = 6d_1 x - 10d_1 + 108x - 162 \implies p_1''(1) = -4d_1 - 54.$$

Igualando ambas evaluaciones,

$$42 + 4d_1 = -4d_1 - 54 \implies d_1 = -96/8 = -12.$$

Ejercicio 3. a) Ajustar estos datos por el método de mínimos cuadrados es hallar los parámetros α, β, γ que minimizan la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por el modelo o, equivalentemente, la norma euclídea del residuo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}_i := f(t_i) - y_i$. Para esto, buscamos minimizar la función de error

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{3} \left(y_i - f(t_i)\right)^2$$

donde y_i son los valores observados y $f(t_i)$ son los valores predichos por el modelo.

b) Dado que $\gamma = 1$, la función de ajuste se reduce a

$$f(t) = \alpha + \frac{\beta}{t+1}.$$

La matriz de diseño es $A = (a_{ij}) = \phi_i(t_j)$, donde $\phi_1(t) = 1$, $\phi_2(t) = 1/(t+1)$ y $t_j = 0, 1, 3$. Entonces,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando las ecuaciones normales, obtenemos la solución hallando $\mathbf{x}^*$ tal que,

$$A^t A \mathbf{x}^* = A^t \mathbf{y}.$$

Calculamos $A^t A$ y $A^t \mathbf{y}$:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{21}{16} \end{pmatrix},$$

$$A^t \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones normales resultan,

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{21}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{18}{7} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4.

a) Definimos el vector $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Entonces, el sistema de primer orden es

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x(t)x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_1(t)x_2(t) \end{pmatrix} =: \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

con condición inicial

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Para el método de Euler hacia adelante con paso $h = 1$, usamos

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{x}^n).$$

Para $n = 0$,

$$\mathbf{f}(t^0, \mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_1(0)x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y entonces,

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \mathbf{f}(t^0, \mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Para el método de Euler hacia atrás con paso $h = 1$, usamos

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + h\mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{x}^{n+1}).$$

Para $n = 0$,

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \mathbf{f}(t^1, \mathbf{x}^1).$$

Evaluando en $\mathbf{x}^1$,

$$\mathbf{f}(t^1, \mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_1^1 x_2^1 \end{pmatrix},$$

y obtenemos

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_1^1 x_2^1 \end{pmatrix}.$$

Esto da lugar al siguiente de ecuaciones no lineales que debemos resolver para computar $\mathbf{x}^1$:

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + x_2^1 \\ x_2^1 = 1 + x_1^1 x_2^1 \end{cases}.$$

d) Para resolver el sistema anterior usando el método de Newton, definimos la función $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 1 - x_2 \\ x_2 - 1 - x_1 x_2 \end{pmatrix},$$

y calculamos la matriz Jacobiana de F en $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,

$$J_F(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, obtenemos

$$J_F\left(\mathbf{x}^0\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$F\left(\mathbf{x}^0\right) = \begin{pmatrix} 1 - 1 - 1 \\ 1 - 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A partir de lo anterior, computamos un paso del método de Newton definiendo $\mathbf{d}^1$ como la solución del sistema

$$J_F(\mathbf{x}^0)\mathbf{d}^1 = -F(\mathbf{x}^0),$$

y calculando $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \mathbf{d}^1$. Resolviendo el sistema anterior, tenemos

$$\mathbf{d}^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|J_F(\mathbf{x}^0)|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

y como $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \mathbf{d}^1$,

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$