Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Métodos Numéricos

EXAMEN 24 DE FEBRERO DE 2025.

N° de examen	Apellido y Nombre	Cédula

El examen dura 3 horas. No se puede utilizar material.

Ejercicio 1. [5+10+10=25 puntos] Consideremos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) Verificar que la solución del sistema es $\mathbf{x} = [0, 1, 2]^t$.

b) Escribir la iteración de Gauss-Seidel asociada al problema en forma $\mathbf{x}^{k+1} = Q\mathbf{x}^k + \mathbf{r}$ y, dado $\mathbf{x}^0 = [0, 0, 1]^t$, computar $\mathbf{x}^1$.

c) Estudiar la convergencia de la iteración de Gauss-Seidel.

Ejercicio 2. [8+8+9=25 puntos] En este ejercicio puede ser útil la fórmula (1) (ver el reverso de la hoja). Sean $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 8x^2$, y los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

a) Explicar en qué consiste la interpolación cúbica a trozos de Hermite y calcularla para la función f por los puntos x_0, x_1, x_2.

b) Explicar en qué consiste la interpolación con splines cúbicas y, para la función f dada, cómo se determinan los coeficientes en la ecuación (1).

c) Un tipo de spline completa es aquella que cumple que la derivada en los extremos de los intervalos se anulan. Calcular dicha interpolante spline completa para f por los puntos x_0, x_1, x_2.

Ejercicio 3. [10+10=20 puntos] Sean los puntos

t	0	1	3
y	2	1	0

,

y se los quiere ajustar mediante una función de la forma $y = f(t) = \alpha + \frac{\beta}{t+\gamma}$.

a) Explicar en qué consiste ajustar esos puntos mediante el método de mínimos cuadrados.

b) En la función de la parte anterior, se fija el valor $\gamma = 1$. Resolver el problema de mínimos cuadrados resultante.

Ejercicio 4. [6+8+8+8=30 puntos] Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y''(t) = y(t)y'(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

a) Escribir el problema como uno de primer orden para una incógnita $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Indicar la ecuación diferencial y la condición inicial que satisface $\mathbf{x}$.

b) A partir del valor de $\mathbf{x}(0)$ obtenido en la parte anterior, computar un iterado con el método de Euler hacia adelante con paso $h = 1$.

c) A partir del valor de $\mathbf{x}(0)$ obtenido en la parte a), escribir la iteración resultante de utilizar el método de Euler hacia atrás con paso $h = 1$. Notar que no se pide computar el iterado.

d) Para resolver numéricamente la ecuación resultante en la parte anterior, se propone utilizar el método de Newton. Comenzando del valor de $\mathbf{x}(0)$ obtenido en la parte a), realizar un paso del método de Newton en el sistema obtenido en la parte c).

Algunas propiedades útiles.

Inversa de un tipo de matrices triangulares inferiores. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac - b & -c & 1 \end{bmatrix}.$$

Interpolantes cúbicas a trozos. En teórico mostramos que los polinomios interpolantes cúbicos a trozos por $\{(x_i, y_i)\}_{i=0,\dots,n}$, se pueden escribir de la siguiente forma: si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \dots, n-1)$, entonces

$$\begin{aligned} p(x) = {} & \left(\frac{3h_i s^2 - 2s^3}{h_i^3}\right) y_{i+1} + \left(\frac{h_i^3 - 3h_i s^2 + 2s^3}{h_i^3}\right) y_i \\ & + \frac{s^2(s - h_i)}{h_i^2} d_{i+1} + \frac{s(s - h_i)^2}{h_i^2} d_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Aquí, $h_i := x_{i+1} - x_i$, $s := x - x_i$, y se cumplen:

$$p(x_i) = y_i, \quad p(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad p'(x_i) = d_i, \quad p'(x_{i+1}) = d_{i+1}.$$