Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

Viernes 21 de febrero de 2025

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de Identidad

Control	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4										

La duración del examen es de tres horas y media. Cada respuesta correcta suma 10 puntos. Cada respuesta incorrecta resta 1,5 puntos.
Recordar que $\mathbb{R}_n[x]$ es el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de matrices de tamaño $m\times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ e I_n es la matriz identidad de tamaño $n\times n$. En este examen todo espacio vectorial es de dimensión finita mayor o igual a 1.

Ejercicio 1.

Sea $T:\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$ transformación lineal, $\mathcal{A}=\left\{v_1,v_2,v_3,v_4\right\}$ base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}=\left\{(0,-3,1),(2,0,1),(-3,0,2)\right\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Si ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 3\\ -2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $v=v_1+2v_2-v_3$ entonces:

(A) $T(v)=(1,2,-1,0)$.

(B) $T(v)=(5,-5,1)$.

(C) $T(v)=(-7,-12,4)$.

(D) $T(v)=(-13,-15,2)$.

(E) $T(v)=(4,-2,1)$.

Ejercicio 2.

Considerar el subespacio vectorial $S_a=\left[1+2x-x^2,1+ax-x^2,a-x-x^2\right]$ de $\mathbb{R}_2[x]$, donde $a\in\mathbb{R}$ y $p(x)=1+x^2$. Indicar la opción correcta:

(A) Existen exactamente dos valores $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ tales que $p(x)\in S_a$ para todo $a\neq a_1,a_2$.

(B) Existe un único valor $a_1\in\mathbb{R}$ tal que $p(x)\in S_a$ para todo $a\neq a_1$.

(C) El polinomio $p(x)\in S_a$ para exactamente dos valores $a_1,a_2\in\mathbb{R}$.

(D) El polinomio $p(x)\in S_{a_1}$ para un único valor $a_1\in\mathbb{R}$.

(E) El polinomio $p(x)\in S_a$ para todo $a\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 3.

Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que $N(T)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x=y, z=x\right\}$, $\mathrm{Im}(T)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+z=0\right\}$ y $T(x,y,z)=(x,y,z)$ para todo $(x,y,z)\in Im(T)$ (Observar que el dominio y codominio de T coinciden y que $\mathrm{Im}(T)\subset\mathbb{R}^3$). Indicar la opción correcta:

(A) $T(3,0,0)=(1,1,-2)$.

(B) $T(3,0,0)=(0,0,0)$.

(C) $T(3,0,0)=(1,-1,0)$.

(D) $T(3,0,0)=(2,-1,-1)$.

(E) $T(3,0,0)=(1,1,1)$.

Ejercicio 4.

Considerar el sistema de ecuaciones lineales $(S) : \begin{cases} x + my + z &= m+2 \\ x + y + mz &= -2(m+1) \\ mx + y + z &= m \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

Indicar la opción correcta:

(A) Existen únicos valores m_1 y m_2 tales que (S) es incompatible para m_1 y (S) es compatible indeterminado para m_2.

(B) El sistema de ecuaciones lineales (S) es compatible determinado para todo $m \in \mathbb{R}$.

(C) El sistema de ecuaciones lineales (S) es incompatible para todo $m \in \mathbb{R}$.

(D) Existe un único valor de m para el cual el sistema (S) es compatible determinado.

(E) El sistema de ecuaciones lineales (S) es compatible indeterminado para todo $m \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5.

Sean $S = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^t\right\}$, $T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$ y $U = S + T$ subespacios de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Indicar la opción correcta:

(A) $U = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $S \cap T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

(B) $U \neq S \oplus T$ y $\dim(U) = 3$.

(C) $U = S \oplus T$ y $\dim(U) = 3$.

(D) $U = S \oplus T = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(E) $U = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $S \cap T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

Ejercicio 6.

Sea $T : V \to W$ transformación lineal sobreyectiva entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Indicar la opción correcta:

(A) Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es una base de V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es una base de W.

(B) Si $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es linealmente independiente.

(C) Si $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es un generador de W, entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un generador de V.

(D) Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un generador de V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es un generador de W.

(E) $\dim(W) > \dim(V)$.

Ejercicio 7.

Sean las rectas $r : \begin{cases} x &= (a+2)\lambda \\ y &= 1 \\ z &= a \end{cases}$ y $s : \begin{cases} ax + y &= 2 + a^2 \\ (a-1)x + z &= a^2 \end{cases}$, donde a es un parámetro real diferente de -2 $(a \neq -2)$. Indicar la opción correcta:

(A) Existe un único valor de a para el cual $r \cap s \neq \emptyset$ y para todo valor de a, las rectas son paralelas.

(B) Existen valores de a para los cuales r y s son paralelas y para todo valor de a, $r \cap s = \emptyset$.

(C) Existen valores de a para los cuales r y s son paralelas y existe un único valor de a para el cual $r \cap s = \emptyset$.

(D) $r \cap s = \emptyset$ para todo valor de a y no son paralelas para todo valor de a.

(E) Existe un único valor de a para el cual $r \cap s \neq \emptyset$ y las rectas no son paralelas para todo valor de a.

Ejercicio 8.

Sea $T : V \to W$ transformación lineal entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales donde $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$ y $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. Indicar la opción correcta:

(A) Si T es sobreyectiva entonces $\dim(N(T)) = 1$.

(B) T no es inyectiva pero sí es sobreyectiva.

(C) Si $\dim(N(T)) = 2$ entonces T es sobreyectiva.

(D) T es la transformación nula.

(E) T es inyectiva.

Ejercicio 9.

Considerar la recta $r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x + y = 4$. La distancia de la recta r al plano π es:

(A) $d(r,\pi) = 0$.

(B) $d(r,\pi) = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$.

(C) $d(r,\pi) = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

(D) $d(r,\pi) = \sqrt{5}$.

(E) $d(r,\pi) = 4$.

Ejercicio 10.

Sea S_k el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$\Big\{(1,-1,1),(k,1,k),(-1,k^2,k-2)\Big\}, k \in \mathbb{R}.$$

Indicar la opción correcta:

(A) Existe un único $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\dim(S_{k_1}) = 2$ y $\dim(S_k) = 3$ para todo $k \neq k_1$.

(B) Existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(S_{k_1}) = \dim(S_{k_2}) = 2$ y $\dim(S_k) = 3$ para todo $k \neq k_1, k_2$.

(C) Para todo $k \in \mathbb{R}$, es $\dim(S_k) = 2$.

(D) Existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(S_{k_1}) = 1$, $\dim(S_{k_2}) = 2$ y $\dim(S_k) = 3$ para todo $k \neq k_1, k_2$.

(E) Para todo $k \in \mathbb{R}$, es $\dim(S_k) = 3$.