

Examen - Geometría y Álgebra Lineal 1

Viernes 21 de febrero de 2025

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de Identidad

Control	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										

La duración del examen es de tres horas y media. Cada respuesta correcta suma 10 puntos. Cada respuesta incorrecta resta 1,5 puntos.

Recordar que $\mathbb{R}_n[x]$ es el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en \mathbb{R} , $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en \mathbb{R} e I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. En este examen todo espacio vectorial es de dimensión finita mayor o igual a 1.

Ejercicio 1.

Sea S_k el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 generado por

$$\{(1, -1, 1), (k, 1, k), (-1, k^2, k - 2)\}, k \in \mathbb{R}.$$

Indicar la opción correcta:

- (A) Existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(S_{k_1}) = \dim(S_{k_2}) = 2$ y $\dim(S_k) = 3$ para todo $k \neq k_1, k_2$.
- (B) Para todo $k \in \mathbb{R}$ es $\dim(S_k) = 3$.
- (C) Para todo $k \in \mathbb{R}$ es $\dim(S_k) = 2$.
- (D) Existe un único $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\dim(S_{k_1}) = 2$ y $\dim(S_k) = 3$ para todo $k \neq k_1$.
- (E) Existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(S_{k_1}) = 1$, $\dim(S_{k_2}) = 2$ y $\dim(S_k) = 3$ para todo $k \neq k_1, k_2$.

Ejercicio 2.

Sea $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformación lineal, $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B} = \{(0, -3, 1), (2, 0, 1), (-3, 0, 2)\}$

base de \mathbb{R}^3 . Si ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $v = v_1 + 2v_2 - v_3$ entonces:

- (A) $T(v) = (4, -2, 1)$.
- (B) $T(v) = (5, -5, 1)$.
- (C) $T(v) = (-7, -12, 4)$.
- (D) $T(v) = (-13, -15, 2)$.
- (E) $T(v) = (1, 2, -1, 0)$.

Ejercicio 3.

Sea $T : V \rightarrow W$ transformación lineal entre \mathbb{R} -espacios vectoriales donde $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$ y $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. Indicar la opción correcta:

- (A) T es inyectiva.
- (B) Si T es sobreyectiva entonces $\dim(N(T)) = 1$.
- (C) T es la transformación nula.
- (D) Si $\dim(N(T)) = 2$ entonces T es sobreyectiva.
- (E) T no es inyectiva pero si es sobreyectiva.

Ejercicio 4.

Sea $T : V \rightarrow W$ transformación lineal sobreyectiva entre \mathbb{R} -espacios vectoriales de dimensión finita. Indicar la opción correcta:

- (A) Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base de V entonces $\{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ es una base de W .
- (B) $\dim(W) > \dim(V)$.
- (C) Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un generador de V entonces $\{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ es un generador de W .
- (D) Si $\{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente entonces $\{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ es linealmente independiente.
- (E) Si $\{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ es un generador de W entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un generador de V .

Ejercicio 5.

Considerar la recta $r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x + y = 4$. La distancia de la recta r al plano π es:

- (A) $d(r, \pi) = 0$.
- (B) $d(r, \pi) = 4$.
- (C) $d(r, \pi) = \sqrt{5}$.
- (D) $d(r, \pi) = \frac{4}{\sqrt{5}}$.
- (E) $d(r, \pi) = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$.

Ejercicio 6.

Sean $S = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A = A^t\}$, $T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ y $U = S + T$ subespacios de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Indicar la opción correcta:

- (A) $U = S \oplus T$ y $\dim(U) = 3$.
- (B) $U = S \oplus T = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (C) $U = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $S \cap T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$.
- (D) $U \neq S \oplus T$ y $\dim(U) = 3$.
- (E) $U = \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ y $S \cap T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$.

Ejercicio 7.

Sean las rectas $r : \begin{cases} x = (a+2)\lambda \\ y = 1 \\ z = a \end{cases}$ y $s : \begin{cases} ax + y = 2 + a^2 \\ (a-1)x + z = a^2 \end{cases}$, donde a es un parámetro real diferente de -2 ($a \neq -2$). Indicar la opción correcta:

- (A) $r \cap s = \emptyset$ para todo valor de a y no son paralelas para todo valor de a .
- (B) Existe un único valor de a para el cual $r \cap s \neq \emptyset$ y las rectas no son paralelas para todo valor de a .
- (C) Existen valores de a para los cuales r y s son paralelas y para todo valor de a $r \cap s = \emptyset$.
- (D) Existen valores de a para los cuales r y s son paralelas y existe un único valor de a para el cual $r \cap s = \emptyset$.
- (E) Existe un único valor de a para el cual $r \cap s \neq \emptyset$ y para todo valor de a las rectas son paralelas.

Ejercicio 8.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, z = x\}$, $\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ y $T(x, y, z) = (x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \text{Im}(T)$ (Observar que el dominio y codominio de T coinciden y que $\text{Im}(T) \subset \mathbb{R}^3$). Indicar la opción correcta:

- (A) $T(3, 0, 0) = (2, -1, -1)$. (C) $T(3, 0, 0) = (1, 1, -2)$. (E) $T(3, 0, 0) = (0, 0, 0)$.
(B) $T(3, 0, 0) = (1, 1, 1)$. (D) $T(3, 0, 0) = (1, -1, 0)$.

Ejercicio 9.

Considerar el sistema de ecuaciones lineales (S):
$$\begin{cases} x + my + z = m + 2 \\ x + y + mz = -2(m + 1) \\ mx + y + z = m \end{cases}, m \in \mathbb{R}.$$

Indicar la opción correcta:

- (A) El sistema de ecuaciones lineales (S) es compatible determinado para todo $m \in \mathbb{R}$.
(B) El sistema de ecuaciones lineales (S) es incompatible para todo $m \in \mathbb{R}$.
(C) Existen únicos valores m_1 y m_2 tales que (S) es incompatible para m_1 y (S) es compatible indeterminado para m_2 .
(D) Existe un único valor de m para el cual el sistema (S) es compatible determinado.
(E) El sistema de ecuaciones lineales (S) es compatible indeterminado para todo $m \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 10.

Considerar el subespacio vectorial $S_a = [1 + 2x - x^2, 1 + ax - x^2, a - x - x^2]$ de $\mathbb{R}_2[x]$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $p(x) = 1 + x^2$. Indicar la opción correcta:

- (A) El polinomio $p(x) \in S_a$ para exactamente dos valores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
(B) Existe un único valor $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) \in S_a$ para todo $a \neq a_1$.
(C) El polinomio $p(x) \in S_{a_1}$ para un único valor $a_1 \in \mathbb{R}$.
(D) El polinomio $p(x) \in S_a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
(E) Existen exactamente dos valores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $p(x) \in S_a$ para todo $a \neq a_1, a_2$.