Universidad de la República - Facultad de Ingenieria. -Tecnólogo Mecánico
Matemática 1 - Práctico2- Determinantes.

1. Calcular los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix}. \; C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \; D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}. \; \text{E} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Calcular los siguientes determinantes desarollamdo por la fila o columna mas conveniente:

$$\text{A=}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \text{B=}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Sabiendo que $K = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}. \; C = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} a+5c & 3b & c \\ d+5f & 3e & f \\ 2g+10i & 6h & 2i \end{vmatrix}$$

   (a) Dadas $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$,calcular $det(A.B)$.

   (b) Dadas $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, y $B = \begin{vmatrix} 2 & k+1 \\ k-2 & -1 \end{vmatrix}$, determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $det(A.B) = 0$.

   (c) Dadas $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, y $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & k \\ 0 & k & 2 \end{vmatrix}$ determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $A.B$ no admite inversa.

5. Investigar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   Demostrar en caso de que sea verdadera y proponer un contraejemplo en caso de ser falsa.

   (a) $(A+B)^2 = A.A + 2A.B + B.B$.

   (b) $(A+B)(A-B) = A.A - BB$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ encontrar una matriz B_{2x2} no nula tal que el producto de $A.B$ resulte la matriz nula.

5. Una matriz cuadrada A se dice idempotente si $A.A = A$.

   (a) Probar que $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente.

   (b) Probar que si $A.B = A$ y $BA = B$ entonces A y B son idempotentes.

(c) Probar que si A es idempotente entonces $A^n = A$ para todo $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcular la matriz inversa de A y resolver $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Calcular la matriz inversa de A y resolver $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcular la matriz inversa de A.

   (b) Resolver $AX - 2I = B$.

8. Si A y B son dos matrices invertibles de $n \times n$ entonces $A.B$ e invertible y se cumple que $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

9. Investigar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando la respuesta(en caso verdadera demostrar y en caso falsa dar un contraejemplo).

   (a) Si A es invertible $(A^{-1})^{-1} = A$.

   (b) Si A es invertible y $k \neq 0$ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

   (c) Si A es invertible entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

   (d) Si A y B son dos matrices de $n \times n$ invertibles entonces $(A + B)$ es invertible.

   (e) Si $A^2 = 0$ entonces $I_n - A$ es invertible.