Matemática Inicial
Examen 14 de febrero de 2025.

N° Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo

Importante: En esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

El examen dura 3 horas y es sin material ni calculadora. Poner nombre y cédula en todas las hojas. Al comenzar un nuevo ejercicio, hacerlo en una carilla nueva.

Puntajes (uso docente)

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Total

Ejercicio 1

1. *Hallar A el conjunto solución de la inecuación:*

$$\log_2(2x-6)-\log_2(x-1)>0.$$

2. *Hallar B el conjunto solución de la inecuación:*

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2+1}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{5x}.$$

3. *Hallar $A^c\cap B$ siendo A y B los conjuntos hallados en las partes anteriores.*

Solución

1. Para que $\log_2(2x-6)$ quede bien definido necesitamos $2x-6>0$, o sea $x>3$. Por otro lado, para que $\log_2(x-1)$ quede bien definido, necesitamos $x>1$. En conclusión, para que la inecuación quede bien definida es necesario $x>3$, es decir el dominio es $D=(3,\infty)$.

   Utilizando las propiedades de logaritmo tenemos que :

$$\log_2(2x-6)-\log_2(x-1)=\log_2\left(\frac{2x-6}{x-1}\right)>0\Leftrightarrow\frac{2x-6}{x-1}>1\Leftrightarrow 2x-6>x-1\Leftrightarrow x>5$$

   Por lo tanto, el conjunto solución es $A=(3,+\infty)\cap(5,+\infty)=(5,+\infty)$

2. Para resolver esta inecuación llevamos todas las potencias a la misma base. Para esto, observamos que:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2+2}\quad\text{y}\quad\left(\frac{2}{3}\right)^{5x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-5x}$$

   por lo cual tenemos que $2x^2+2\geq-5x$ es decir $2x^2+5x+2\geq0$. Las raíces del polinomio $2x^2+5x+2$ son $-\frac{1}{2}$ y -2 y analizando el signo obtenemos que

$$B=(-\infty,-2]\cup[-\frac{1}{2},+\infty).$$

3. $$A^c\cap B=(-\infty,5]\cap((-\infty,-2]\cup[-\frac{1}{2},+\infty))=(-\infty,-2]\cup[-\frac{1}{2},5].$$

Ejercicio 2 *Dado $a \in \mathbb{R}$ se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} a\left(\frac{x^2+2x-15}{x-3}\right) & si\ x > 3, \\ \\ \frac{2x^2-x+1}{4-x} & si\ x \leq 3. \end{cases}$$

1. *Hallar, si existe, un valor de a para que f sea continua.*
2. *Hallar $f(2)$ y $f'(2)$.*
3. *Hallar la recta tangente a la función f en el punto $(2, f(2))$.*

Solución

1. Calculemos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} a\left(\frac{x^2+2x-15}{x-3}\right) = \lim_{x \to 3^+} a\left(\frac{(x-3)(x+5)}{x-3}\right) = 8a$$

Por otro lado,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2-x+1}{4-x} = 16$$

Ademas $f(3) = 16$ y f será continua en 3 si $8a = 16$ o sea $a = 2$.

2. Tenemos que $f(2) = \frac{2(2)^2-2+1}{4-2} = \frac{7}{2}$. Por otro lado, utilizando la derivada del cociente de funciones resulta:

$$f'(x) = \frac{(4x-1)(4-x)-(2x^2-x+1)(-1)}{(4-x)^2} = \frac{-2x^2+16x-3}{(4-x)^2},$$

y por tanto $f'(2) = \frac{21}{4}$.

3. Con los datos obtenidos en la parte anterior tenemos que a recta tangente es:

$$y = \frac{21}{4}(x-2) + \frac{7}{2} = \frac{21}{4}x - 7.$$

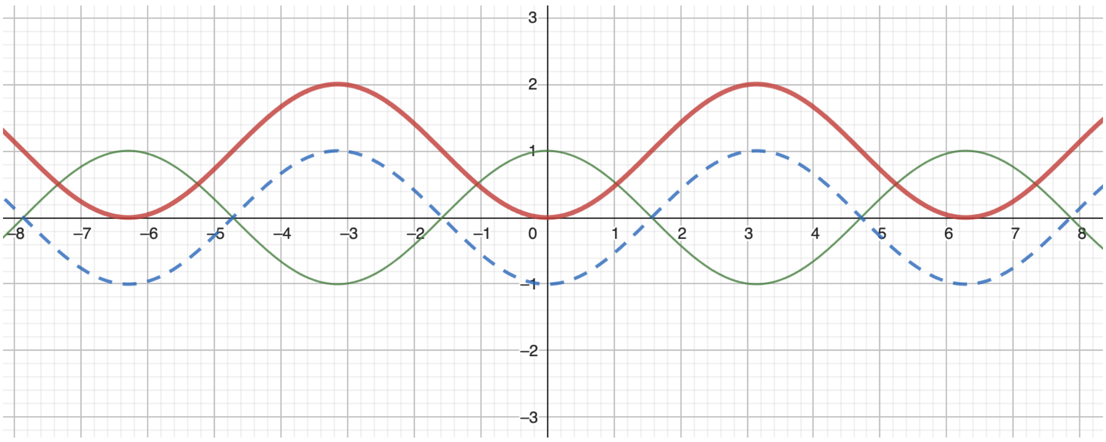
Matemática Inicial
Examen 14 de febrero de 2025.

Ejercicio 3 *Considera* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = 1 - \cos(x)$.

1. *Hallar* $g(0)$, $g(\frac{\pi}{2})$ *y* $g(\pi)$.
2. *Hallar el conjunto de preimagenes de* $\{1\}$ *por* g.
3. *A partir del gráfico de la función* $f(x) = cos(x)$ *hallar el gráfico de* g.

Solución

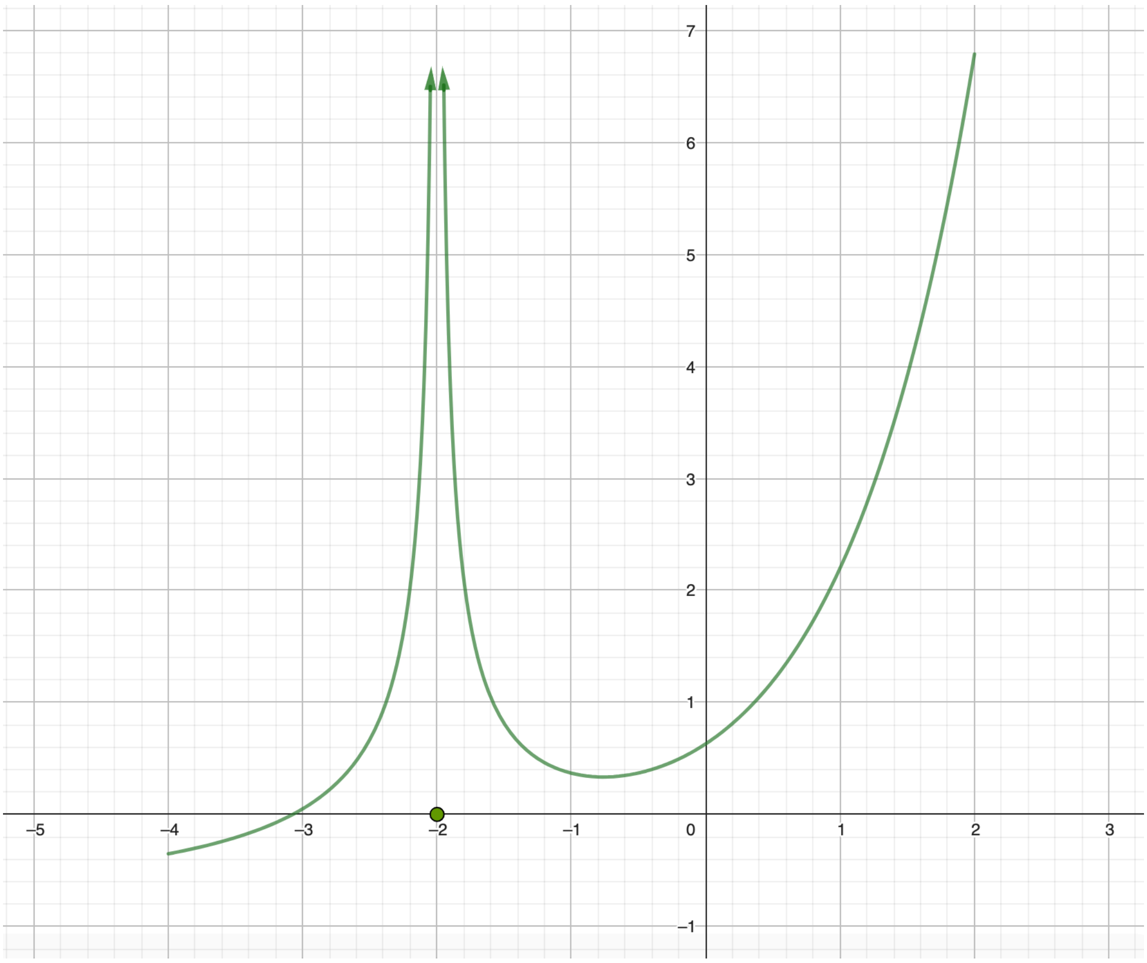
1. $g(0) = 1 - \cos(x) = 1 - 1 = 0$,
   $g(\pi/2) = 1 - \cos(\pi/2) = 1 - 0 = 1$,
   $g(\pi) = 1 - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$.
2. $g^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 - \cos(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$.
3. La gráfica de g se obtiene simetrizando la grafica de la función $x \to \cos(x)$ (línea sólida fina verde) respecto al eje x (para obtener $-\cos(x)$, línea punteada en la gráfica) y luego trasladando 1 hacia arriba (para obtener $-\cos(x) + 1$, línea sólida gruesa roja).



Ejercicio 4 *Se considera el gráfico de la función* $h : [-4, 2] \to \mathbb{R}$

1. *¿ h es biyectiva? Justifique su respuesta.*
2. *Restringir el dominio y codominio de h para que sea biyectiva. Justifique su respuesta.*
3. *Dar un valor y en la imagen de* f *tal que tenga 3 preimagenes. Marcarlo en el gráfico.*
4. *¿Existe el límite* $\lim_{x \to -2} h(x)$*? en caso afirmativo, hallarlo.*
5. *Ordenar de menor a mayor los elementos del siguiente conjunto:*

$$\left\{h'\left(\frac{-7}{2}\right), h'\left(\frac{-3}{2}\right), h'(-1), h'\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$$



Solución

1. h no es biyectiva, se puede ver por ejemplo en que existen valores de la imagen con más una preimagen, lo que implica que la función no es inyectiva.

2. Existen muchas maneras de restringir el dominio y codominio para que sea biyectiva. Un ejemplo es tomar como dominio a $D = [0,2]$ y como codominio la imagen de este intervalo que es aproximadamente $[0{,}6, 6{,}8]$. Dado que la función restringida a ese dominio es creciente, resulta biyectiva.

3. Existen inifinitos valores, por ejemplo cualquier valor $y > 1$ tiene tres preimágenes.

4. Vamos a estudiar los límites laterales. De la gráfica se observa que $\lim_{x\to -2^+} h(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to -2^-} h(x) = +\infty$. Por lo tanto al coincidir los límites laterales, tenemos que $\lim_{x\to -2} h(x) = +\infty$.

5. Observando las pendientes de las rectas tangentes al gráfico en los puntos indicados tenemos que:

$$h'\left(\frac{-3}{2}\right) < h'(1) < 0 \quad \text{y que}$$

$$0 < h'\left(\frac{-7}{2}\right) < h'\left(\frac{3}{2}\right)$$

Por lo tanto el orden de menor a mayor es: $\frac{-3}{2}, -1, \frac{-7}{2}, \frac{3}{2}$.