

EXAMEN FEBRERO 2025 - VERSIÓN 4
VIERNES 14 DE FEBRERO DE 2025

Nro de Lista	Cédula	Apellido y nombre	Firma

Información importante:

- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- La duración del examen es de tres horas y media.
- Recordar que se aprueba el examen con 6 ejercicios contestados correctamente y a lo sumo 2 mal contestados, ó al menos 7 contestados correctamente.

Respuestas de los ejercicios de múltiple opción:

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E o F**, según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
F	E	E	F	D	A	F	F	E	E

Notación y propiedades útiles:

- $S^*(f, P)$ denota la suma superior y $S_*(f, P)$ la suma inferior de f con respecto a la partición P .
- **Propiedades de la función logaritmo:**
 1. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
 2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
 3. $\log(a^k) = k \log(a)$
- **Seno y coseno de algunos ángulos notables:**

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
0	0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1

(Esta carilla está en blanco a propósito)

Ejercicio 1

Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \log(x^2 + 2x^4)$$

Entonces $f'(1)$ vale:

A) $\frac{5}{3}$

C) $\frac{1}{3}$

E) 10

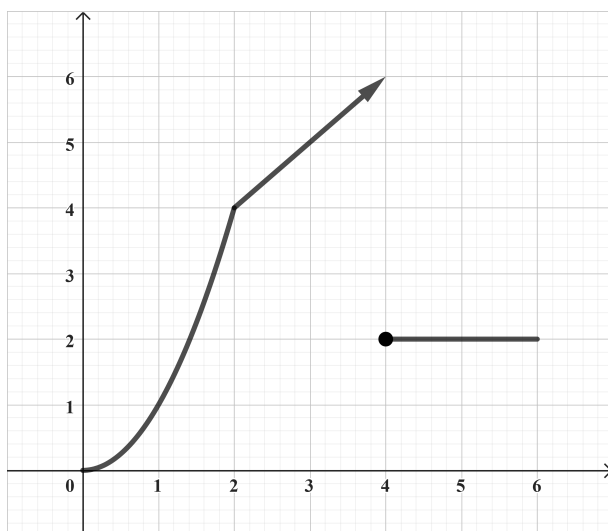
B) $\log(3)$

D) $10 \log(3)$

F) $\frac{10}{3}$

Ejercicio 2

Considere la función $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo gráfico se muestra a continuación:



Sea $P = \{0, 1, 3, 5, 6\}$ una partición del intervalo $[0, 6]$. Indique cuánto vale la suma superior $S^*(f, P)$ de f con respecto a la partición P :

A) 10

C) 14

E) 25

B) 28

D) 21

F) 15

Ejercicio 3

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función tal que

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) \sin\left(\frac{2x}{x-1}\right) + \frac{\pi}{4} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right), & \text{si } x \neq 1, \\ a, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Indicar la opción correcta.

- A) No existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f sea una función continua.
- B) f es continua si $a = \frac{\pi}{4}$.
- C) f es continua si $a = -\frac{\pi}{4}$.
- D) f es continua si $a = -\frac{\pi}{2}$.
- E) f es continua si $a = \frac{\pi}{2}$.
- F) f es continua para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $P_n = \{a_0, \dots, a_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ en n -subintervalos de igual longitud. Se consideran las siguientes afirmaciones:

- Afirmación I: f es creciente en $[a, b]$.
- Afirmación II: f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.
- Afirmación III: Para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \epsilon$.

Indicar cuál de las siguientes cadenas de implicancias es cierta para las afirmaciones anteriores.

- A) Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación I
- B) Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación III
- C) Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación II
- D) Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación I
- E) Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación II
- F) Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación III

Ejercicio 5

Indicar el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\int_1^{x^2} e^{-t^2} dt}{x-1}$$

- | | | |
|------------------|------------------|--------------|
| A) e | C) 0 | E) $+\infty$ |
| B) $\frac{1}{e}$ | D) $\frac{2}{e}$ | F) $2e$ |

Ejercicio 6

Considere la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_{x^2}^1 e^{-\sqrt{t}} dt.$$

Indicar cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la de la recta tangente al gráfico de F en el punto $(1, F(1))$.

A) $y = \frac{2}{e}(1 - x)$

C) $y = 1 + \frac{2}{e}(1 - x)$

E) $y = e + \frac{2}{e}(1 - x)$

B) $y = 2e(1 - x)$

D) $y = 1 + 2e(1 - x)$

F) $y = e + 2e(1 - x)$

Ejercicio 7

Indicar el valor de la siguiente integral

$$\int_2^3 \log(x^2 - 1) dx$$

A) $10 \log(2) - 3 \log(3)$

C) $3 \log(2) - 2 \log(3) - 2$

E) $9 \log(2) - 2 \log(3) - 2$

B) $3 \log(2) - \log(3)$

D) $3 \log(2) - 10 \log(3) - 2$

F) $10 \log(2) - 3 \log(3) - 2$

Ejercicio 8

Indicar el valor de la siguiente integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\text{Arctan}(x)} + 1}{x^2 + 1} dx$$

A) $\frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

C) $\frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}$

E) $\frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

B) $\frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}$

D) $\frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}$

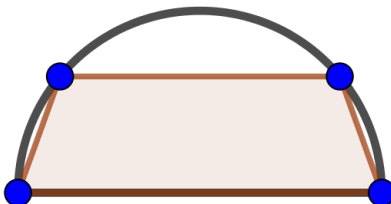
F) $\frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}$

Los ejercicios 9 y 10 están en la siguiente carilla

Ejercicio 9

En un terreno con forma de semicírculo de 2 hectómetros de diámetro, una ingeniera decide cercar una parte del mismo con las siguientes condiciones:

- La región cercada tendrá forma de trapecio.
- El trapecio está inscrito en el semicírculo.
- La base del trapecio corresponde al diámetro del semicírculo.



El área máxima de un trapecio en estas condiciones, medida en hectómetros cuadrados, es:

A) $\frac{4}{9}2\sqrt{2}$

B) 1

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$

E) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

F) $\frac{1}{3}(\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1))$

Ejercicio 10

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = x - \text{Arctan}(x)$. Indicar cuál de los siguientes polinomios es el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto 0.

A) $P_3(f, 0)(x) = -x - \frac{x^3}{3!}$

C) $P_3(f, 0)(x) = -x + \frac{x^3}{3}$

E) $P_3(f, 0)(x) = \frac{x^3}{3}$

B) $P_3(f, 0)(x) = \frac{x^3}{3!}$

D) $P_3(f, 0)(x) = -x + \frac{x^3}{3!}$

F) $P_3(f, 0)(x) = -x - \frac{x^3}{3}$