Examen Febrero 2025 - Versión 3

viernes 14 de febrero de 2025

Nro de Lista	Cédula	Apellido y nombre	Firma

Información importante:

- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- La duración del examen es de tres horas y media.
- Recordar que se aprueba el examen con 6 ejercicios contestados correctamente y a lo sumo 2 mal contestados, ó al menos 7 contestados correctamente.

Respuestas de los ejercicios de múltiple opción:

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E o F**, según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
A	F	F	A	E	B	A	A	F	F

Notación y propiedades útiles:

- $S^*(f,P)$ denota la suma superior y $S_*(f,P)$ la suma inferior de f con respecto a la partición P.
- **Propiedades de la función logaritmo:**
  1. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
  2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
  3. $\log(a^k) = k\log(a)$
- **Seno y coseno de algunos ángulos notables:**

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
0	0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1

(Esta carilla está en blanco a propósito)

Ejercicio 1

Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

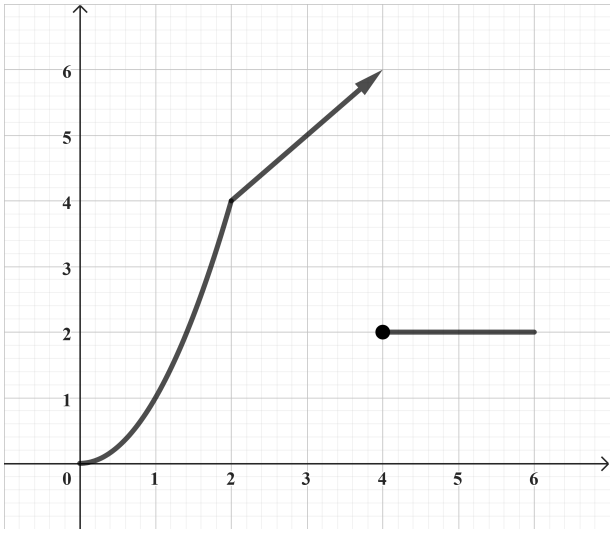
$$f(x) = \log(x^2 + 2x^4)$$

Entonces $f'(1)$ vale:

A) $\frac{10}{3}$
B) $\log(3)$
C) $\frac{1}{3}$
D) $10\log(3)$
E) 10
F) $\frac{5}{3}$

Ejercicio 2

Considere la función $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico se muestra a continuación:



Sea $P = \{0, 1, 3, 5, 6\}$ una partición del intervalo $[0, 6]$. Indique cuánto vale la suma superior $S^*(f, P)$ de f con respecto a la partición P:

A) 10
B) 28
C) 14
D) 21
E) 15
F) 25

Ejercicio 3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\sin\left(\frac{2x}{x-1}\right) + \frac{\pi}{4}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right), & \text{si } x \neq 1, \\ a, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Indicar la opción correcta.

A) No existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f sea una función continua.
B) f es continua si $a = \frac{\pi}{4}$.
C) f es continua si $a = -\frac{\pi}{4}$.
D) f es continua si $a = -\frac{\pi}{2}$.
E) f es continua para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.
F) f es continua si $a = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 4

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y $P_n = \{a_0, \cdots, a_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ en n-subintervalos de igual longitud. Se consideran las siguientes afirmaciones:

- Afirmación I: f es creciente en $[a, b]$.
- Afirmación II: f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.
- Afirmación III: Para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \epsilon$.

Indicar cuál de las siguientes cadenas de implicancias es cierta para las afirmaciones anteriores.

A) Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación III
B) Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación III
C) Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación II
D) Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación I
E) Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación II
F) Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación I

Ejercicio 5

Indicar el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\int_1^{x^2} e^{-t^2} \mathrm{d}t}{x - 1}$$

A) e
B) $\frac{1}{e}$
C) 0
D) $+\infty$
E) $\frac{2}{e}$
F) $2e$

Ejercicio 6

Considere la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_{x^2}^{1} e^{-\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

Indicar cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la de la recta tangente al gráfico de F en el punto $(1, F(1))$.

A) $y = 2e(1-x)$
B) $y = \frac{2}{e}(1-x)$
C) $y = 1 + \frac{2}{e}(1-x)$
D) $y = 1 + 2e(1-x)$
E) $y = e + \frac{2}{e}(1-x)$
F) $y = e + 2e(1-x)$

Ejercicio 7

Indicar el valor de la siguiente integral

$$\int_2^3 \log\left(x^2 - 1\right) \mathrm{d}x$$

A) $10\log(2) - 3\log(3) - 2$
B) $3\log(2) - \log(3)$
C) $3\log(2) - 2\log(3) - 2$
D) $3\log(2) - 10\log(3) - 2$
E) $9\log(2) - 2\log(3) - 2$
F) $10\log(2) - 3\log(3)$

Ejercicio 8

Indicar el valor de la siguiente integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\mathrm{Arctan}(x)} + 1}{x^2 + 1} \mathrm{d}x$$

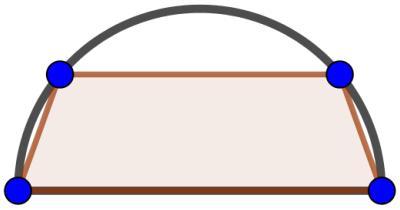
A) $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}$
B) $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}$
C) $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}$
D) $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}$
E) $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$
F) $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

Los ejercicios 9 y 10 están en la siguiente carilla

Ejercicio 9

En un terreno con forma de semicírculo de 2 hectómetros de diámetro, una ingeniera decide cercar una parte del mismo con las siguientes condiciones:

- La región cercada tendrá forma de trapecio.
- El trapecio está inscripto en el semicírculo.
- La base del trapecio corresponde al diámetro del semicírculo.



El área máxima de un trapecio en estas condiciones, medida en hectómetros cuadrados, es:

A) $\frac{4}{9}2\sqrt{2}$
B) 1
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$
E) $\frac{1}{3}(\sqrt{2}(\sqrt{3}+1))$
F) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

Ejercicio 10

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = x - \text{Arctan}(x)$. Indicar cuál de los siguientes polinomios es el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto 0.

A) $P_3(f,0)(x) = -x - \frac{x^3}{3!}$
B) $P_3(f,0)(x) = \frac{x^3}{3!}$
C) $P_3(f,0)(x) = -x + \frac{x^3}{3}$
D) $P_3(f,0)(x) = -x + \frac{x^3}{3!}$
E) $P_3(f,0)(x) = -x - \frac{x^3}{3}$
F) $P_3(f,0)(x) = \frac{x^3}{3}$