Examen Febrero 2025 - Versión 1

viernes 14 de febrero de 2025

Nro de Lista	Cédula	Apellido y nombre	Firma

Información importante:

- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- La duración del examen es de tres horas y media.
- Recordar que se aprueba el examen con 6 ejercicios contestados correctamente y a lo sumo 2 mal contestados, ó al menos 7 contestados correctamente.

Respuestas de los ejercicios de múltiple opción:

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E o F**, según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
C	B	B	C	A	D	C	C	B	B

Notación y propiedades útiles:

- $S^*(f,P)$ denota la suma superior y $S_*(f,P)$ la suma inferior de f con respecto a la partición P.
- **Propiedades de la función logaritmo:**
  1. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
  2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
  3. $\log(a^k) = k\log(a)$
- **Seno y coseno de algunos ángulos notables:**

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
0	0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1

(Esta carilla está en blanco a propósito)

Ejercicio 1

Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

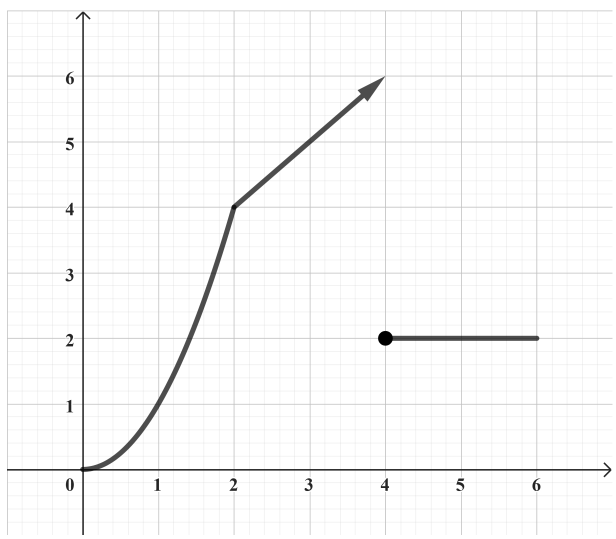
$$f(x) = \log(x^2 + 2x^4)$$

Entonces $f'(1)$ vale:

A) $\log(3)$	C) $\frac{10}{3}$	E) 10
B) $\frac{1}{3}$	D) $10\log(3)$	F) $\frac{5}{3}$

Ejercicio 2

Considere la función $f : [0,6] \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico se muestra a continuación:



Sea $P = \{0, 1, 3, 5, 6\}$ una partición del intervalo $[0, 6]$. Indique cuánto vale la suma superior $S^*(f, P)$ de f con respecto a la partición P:

A) 28	C) 14	E) 15
B) 25	D) 21	F) 10

Ejercicio 3

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\sin\left(\frac{2x}{x-1}\right) + \frac{\pi}{4}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right), & \text{si } x \neq 1, \\ a, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Indicar la opción correcta.

A) f es continua si $a = \frac{\pi}{4}$.
B) f es continua si $a = \frac{\pi}{2}$.
C) f es continua si $a = -\frac{\pi}{4}$.
D) f es continua si $a = -\frac{\pi}{2}$.
E) f es continua para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.
F) No existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f sea una función continua.

Ejercicio 4

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y $P_n = \{a_0, \cdots, a_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ en n-subintervalos de igual longitud. Se consideran las siguientes afirmaciones:

- Afirmación I: f es creciente en $[a,b]$.
- Afirmación II: f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$.
- Afirmación III: Para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \epsilon$.

Indicar cuál de las siguientes cadenas de implicancias es cierta para las afirmaciones anteriores.

A) Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación III
B) Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación II
C) Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación III
D) Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación I
E) Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación II
F) Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación I

Ejercicio 5

Indicar el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\displaystyle\int_1^{x^2} e^{-t^2} \mathrm{d}t}{x-1}$$

A) $\frac{2}{e}$
B) $\frac{1}{e}$
C) 0
D) $+\infty$
E) $2e$
F) e

Ejercicio 6

Considere la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_{x^2}^{1} e^{-\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

Indicar cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la de la recta tangente al gráfico de F en el punto $(1, F(1))$.

A) $y = 2e(1-x)$
B) $y = 1 + \frac{2}{e}(1-x)$
C) $y = 1 + 2e(1-x)$
D) $y = \frac{2}{e}(1-x)$
E) $y = e + \frac{2}{e}(1-x)$
F) $y = e + 2e(1-x)$

Ejercicio 7

Indicar el valor de la siguiente integral

$$\int_2^3 \log\left(x^2-1\right) \mathrm{d}x$$

A) $3\log(2) - \log(3)$
B) $3\log(2) - 2\log(3) - 2$
C) $10\log(2) - 3\log(3) - 2$
D) $3\log(2) - 10\log(3) - 2$
E) $9\log(2) - 2\log(3) - 2$
F) $10\log(2) - 3\log(3)$

Ejercicio 8

Indicar el valor de la siguiente integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\mathrm{Arctan}(x)} + 1}{x^2+1} \mathrm{d}x$$

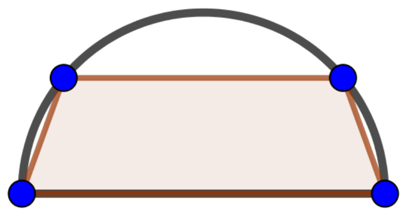
A) $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}$
B) $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}$
C) $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}$
D) $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}$
E) $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$
F) $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

Los ejercicios 9 y 10 están en la siguiente carilla

Ejercicio 9

En un terreno con forma de semicírculo de 2 hectómetros de diámetro, una ingeniera decide cercar una parte del mismo con las siguientes condiciones:

- La región cercada tendrá forma de trapecio.
- El trapecio está inscripto en el semicírculo.
- La base del trapecio corresponde al diámetro del semicírculo.



El área máxima de un trapecio en estas condiciones, medida en hectómetros cuadrados, es:

A) 1
B) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$
E) $\frac{1}{3}(\sqrt{2}(\sqrt{3}+1))$
F) $\frac{4}{9}2\sqrt{2}$

Ejercicio 10

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = x - \text{Arctan}(x)$. Indicar cuál de los siguientes polinomios es el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto 0.

A) $P_3(f,0)(x) = \dfrac{x^3}{3!}$

B) $P_3(f,0)(x) = \dfrac{x^3}{3}$

C) $P_3(f,0)(x) = -x + \dfrac{x^3}{3}$

D) $P_3(f,0)(x) = -x + \dfrac{x^3}{3!}$

E) $P_3(f,0)(x) = -x - \dfrac{x^3}{3}$

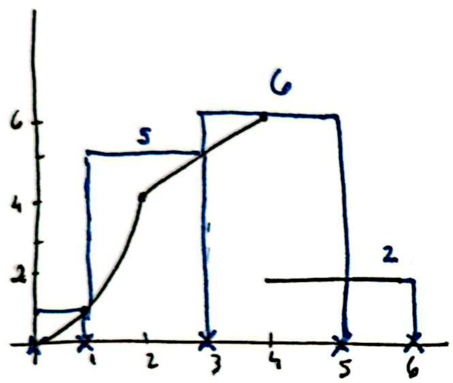
F) $P_3(f,0)(x) = -x - \dfrac{x^3}{3!}$

Ejercicio 1:

$$f(x) = \lg(x^2+2x^4)$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x^4)'}{x^2+2x^4} = \frac{2x+8x^3}{x^2+2x^4} \Rightarrow f'(1) = \frac{2+8}{1+2} = \frac{10}{3} \quad (C)$$

Ejercicio 2:



$P = \{0,1,3,5,6\}$

$S^*(f,P) = \underline{1}\times 1 + \underline{5}\times 2 + \underline{6}\times 2 + \underline{2}\times 1 = 25 \quad (B)$

Ejercicio 3:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \underbrace{\underbrace{(x-1)}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\sin\left(\frac{2x}{x-1}\right)}_{\text{Acot}}}_{\downarrow\, 0} + \frac{\pi}{4}\,\frac{\overset{(\cancel{x-1})(x+1)}{x^2-1}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\pi}{4}(x+1) = \frac{\pi}{4}\cdot 2 = \frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = a$$

$$\Rightarrow f \text{ es continua si } \boxed{a = \frac{\pi}{2}} \quad (B)$$

Escaneado con CamScanner

Ejercicio 4:

$$\underbrace{\bullet \text{ Si } f'(x) \Rightarrow f \text{ es } \nearrow \text{ en } (a,b)}_{\text{Af II}} \quad \left.\begin{array}{l} \\ f \text{ es cont en } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{f \text{ es } \nearrow \text{ en } [a,b]}_{\text{Af I}}$$

$$\bullet \text{ Si } f \text{ es } \nearrow \text{ en } [a,b] \Rightarrow \underbrace{f \text{ es integrable en } [a,b]}_{\text{Af III}}$$

$$\text{Af II} \Rightarrow \text{Af I} \Rightarrow \text{Af III}$$

C

Ejercicio 5:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt}{x-1} \underset{\substack{\text{L'Hopital} \\ \text{T.F}}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{e^{-(x^2)^2} \cdot 2x}{1} = \lim_{x\to 1} 2x\, e^{-x^4} = 2e^{-1} = \boxed{\frac{2}{e}}$$

A

Ejercicio 6:

$$F(x) = \int_{x^2}^{1} e^{-\sqrt{t}}\,dt$$

$$y = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F(1)}} + \overset{-\frac{2}{e}}{\overset{\shortparallel}{F'(1)}}(x-1) = -\frac{2}{e}(x-1) = \frac{2}{e}(1-x) \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{e}(1-x)}$$

D

$$\bullet\ F(1) = \int_1^1 e^{-\sqrt{t}}\,dt = 0$$

$$\bullet\ F'(x) \underset{\text{T.F.}}{=} -e^{-\sqrt{x^2}}(2x) \Rightarrow F'(1) = -e^{-\sqrt{1^2}}\,2\cdot 1 = -e^{-1}2 = -\frac{2}{e}$$

Ejercicio 7

$$\int_2^3 \log(x^2-1)\,dx = \int 1\cdot\log(x^2-1)\,dx = \left[\begin{array}{l} f'=1 \to f=x \\ g=\log(x^2-1) \Rightarrow g'=\dfrac{2x}{x^2-1}\end{array}\right] =$$

$$= x\log(x^2-1) - \int x\cdot\frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

$$= x\log(x^2-1) - 2\underbrace{\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx}_{?}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{\overbrace{x^2-1}^{=1}}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx = \int \frac{\overset{\frac{1}{2}}{\overset{=}{A}}}{x-1} + \frac{\overset{-\frac{1}{2}}{\overset{=}{B}}}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{\overbrace{(A+B)}^{=0}x + \overbrace{(A-B)}^{=1}}{(x-1)(x+1)} \right)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \to A=B+1 \to A+B=0 \Leftrightarrow B+1+B=0 \Leftrightarrow \boxed{B=-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$A = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Luego,

$$\int \log(x^2-1)\,dx = x\log(x^2-1) - 2x - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= x\log(x^2-1) + \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2x$$

$$\int_2^3 \log(x^2-1)\,dx = x\log(x^2-1) + \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2x \Big|_2^3$$

$$= 3\log(\underset{2^3}{\overset{\shortparallel}{8}}) + \log\left(\frac{4}{2}\right) - 6 - \left(2\log(3) + \log\left(\frac{3}{1}\right) - 4\right)$$

$$= 9\log(2) + \log(2) - 6 - (3\log(3) - 4)$$

$$= \boxed{10\log(2) - 3\log(3) - 2.}$$ C

Ejercicio 8:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{Arctg} x} + 1}{x^2+1}\,dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{Arctg} x \\ du = \frac{1}{x^2+1} \end{bmatrix} = \int (\sqrt{u} + 1)\,du = \int (u^{\frac{1}{2}} + 1)\,du$$

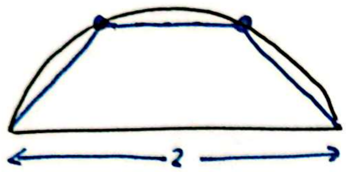
$$= \frac{u^{\overbrace{\frac{1}{2}+1}^{\frac{3}{2}}}}{\underbrace{\frac{1}{2}+1}_{\frac{3}{2}}} + u = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + u \underset{\substack{\text{D.C} \\ u = \operatorname{Arctg} x}}{=}$$

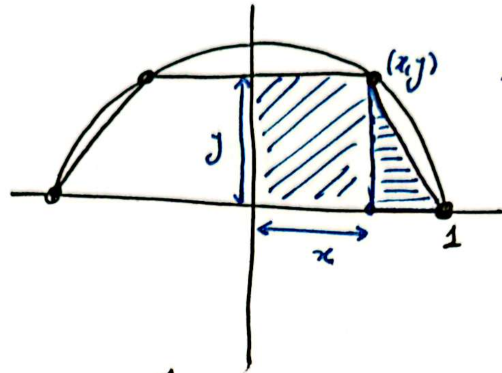
$$= \frac{2}{3}(\operatorname{Arctg}(x))^{\frac{3}{2}} + \operatorname{Arctg} x \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}(\operatorname{Arctg}(1))^{\frac{3}{2}} + \underbrace{\operatorname{Arctg}(1)}_{\frac{\pi}{4}} - \left(\frac{2}{3}(\underbrace{\operatorname{Arctg}(0)}_{0})^{\frac{3}{2}} + \underbrace{\operatorname{Arctg} 0}_{0}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}}$$ C

Ejercicio 9:





$x^2+y^2=1$

$y=\sqrt{1-x^2}$

Sea $x \in [0,1]$ como en la figura

$A(x)$ = área del trapecio inscripto en el semicírculo $= 2\Big(\underbrace{x \cdot y}_{\text{área rect.}} + \underbrace{\frac{(1-x)\,y}{2}}_{\text{área triángulo}}\Big) = \cancel{2}\left(\frac{2x \cdot y + (1-x)\,y}{\cancel{2}}\right)$

$$= 2xy + y - xy = xy + y = (x+1)\,y = (x+1)\sqrt{1-x^2}$$

Queremos maximizar $A(x) = (x+1)\sqrt{1-x^2}$ con $x \in [0,1]$:

$$A'(x) = \sqrt{1-x^2} + (x+1)\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1-x^2-x^2-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$$

sgn $A'(x)$: $- - -\ 0\ + + + + + +\ 0\ - - - - -$ (recta con -1, 0, $\frac{1}{2}$, 1)

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{-4} = \frac{1 \pm 3}{-4} \quad \begin{cases} -1 & \times \\ \frac{1}{2} & \checkmark \end{cases}$$

$$A\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}+1\right)\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \geq 1$$

debido al sgn de $A'(x)$

Si M es el máx abs. de $A(x)$ en $[0,1]$ $\Longrightarrow M = \max\{\underset{\wedge}{A(0)}, \underset{0}{A(1)}, \underset{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{A(\tfrac{1}{2})}\}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$ B

Ejercicio 10:

$$f(x) = x - \operatorname{Arctg}(x)$$

$$P_3(f,0)(x) = \overbrace{f(0)}^{=0} + \overbrace{f'(0)}^{=0}\, x + \overbrace{f''(0)}^{=0}\, \frac{x^2}{2!} + \overbrace{f'''(0)}^{=2}\, \frac{x^3}{3!} = \cancel{2}\, \frac{x^3}{3 \times \cancel{2}} = \boxed{\frac{x^3}{3}}$$

B

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1} \longrightarrow f'(0) = 0$
- $f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \longrightarrow f''(0) = 0$
- $f'''(x) = \frac{2(x^2+1)^{\cancel{2}} - 2x \cdot 2\cancel{(x^2+1)}\, 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2(x^2+1) - 8x^2}{(x^2+1)^3}$

$$= \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3} \longrightarrow f'''(0) = 2$$