Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Geometría y Álgebra Lineal 1 - Anual
Curso 2012

Examen
7 de Diciembre de 2012

No. Examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Ejercicio 1

1. Se considera $r : (1,1,1) + \lambda(1,1,2)$ y $\alpha : -x + 2y + 3z = -3$.

   a) Determinar $\{Q\} = r \cap \alpha$ y $R \in r$ tal que $d(Q,R) = \sqrt{96}$. Indicar todos los posibles puntos R en estas condiciones.

   b) Hallar el $\angle(r,\alpha)$ y $d(B,\alpha)$.

   c) Determinar la ecuación de un plano β tal que $r \subset \beta$ y $\beta \perp \alpha$.

2. Sea $W \subset \mathbb{R}^3$, se define $W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, w\rangle = 0, \forall\, w \in W\}$.

   a) Probar que $W^\perp$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. ¿Es necesario que W sea un subespacio?

   b) Sean $W_1 = \{(1,2,-1)\}$, $W_2 = \{(1,2,-1),(1,0,1),(0,1,1)\}$. Hallar $W_1^\perp, W_2^\perp$ y determinar su posición relativa.

Ejercicio 2

Se consideran V, W espacios vectoriales de dimensión finita, $\mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ base de V.

1. Sean $w_1,\ldots,w_n \in W$. Probar que existe una única transformación $T : V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $i \in \{1,\ldots,n\}$.

2. *a*) Se considera $T : V \to V$ transformación lineal dada por:

   $$T(v_1) = v_1,\ T(v_i) = v_i + v_{i-1},\ \forall\, i \in \{2,\ldots,n\}$$

   Determinar si en estas condiciones T es única y hallar ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$.

   b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal, $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(2,0,1),(0,-2,1)\}$ base de V y tal que $T(-1,1,0) = (-1,1,0)$, $T(2,0,1) = (1,1,1)$, $T(0,-2{,}1) = (2,-2,2)$.
   Hallar ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$, la expresión de T y determinar si es un isomorfismo.

Ejercicio 3

1. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y $\{w_1,\ldots,w_k\}$ un conjunto linealmente independiente de $\operatorname{Im}(T)$. Sea $S = \{v_1,\ldots,v_k\}$ tal que $T(x_i) = w_i$ para $i \in \{1,\ldots,k\}$. Probar que S es linealmente independiente.

2. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ tal que $T(p(x)) = (x \cdot p(x) + p'(x))$.

   a) Hallar $\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$.

   b) Determinar si existe $S : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T \circ S = Id$, donde $Id : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ es la transformación identidad.