Segundo parcial de Cálculo diferencial e integral en una variable

Soluciones

Junio de 2019

Respuestas

La versión se identifica por el primer ejercicio del múltiple opción.

Versión 1. La integral $\int_0^1 x \log\left(\sqrt{x^2+1}\right) dx$...

VERDADERO O FALSO

1	**2**	**3**	**4**	**5**
F	F	F	V	F

MÚLTIPLE OPCIÓN

1	**2**	**3**	**4**
B	D	C	C

Versión 2. El polinomio de Taylor de orden 3...

VERDADERO O FALSO

1	**2**	**3**	**4**	**5**
F	F	F	V	V

MÚLTIPLE OPCIÓN

1	**2**	**3**	**4**
A	B	E	D

Versión 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad ...$$

VERDADERO O FALSO

1	**2**	**3**	**4**	**5**
V	F	V	F	F

MÚLTIPLE OPCIÓN

1	**2**	**3**	**4**
E	A	A	B

Versión 4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Supongamos que f es impar...

VERDADERO O FALSO

1	**2**	**3**	**4**	**5**
V	V	F	F	F

MÚLTIPLE OPCIÓN

1	**2**	**3**	**4**
D	B	A	C

Solución

La solución presentada a continuación está escrita para la versión 1 del parcial.

V o F

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$. Se obtiene mediante productos, cocientes y composiciones de funciones derivables, por lo que es derivable en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto **(2) es falsa**.

Observemos que si $|x| \leq 1$

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1,$$

y que si $|x| > 1$

$$\left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{|x|}{x^2+1} < \frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|} < 1.$$

Por lo tanto, $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leq 1$ siempre. Como la función seno tiene una sola raíz en $[-1, 1]$ (que es 0),

$$f(x) = 0 \iff \frac{x}{x^2+1} = 0 \iff x = 0.$$

Por lo tanto **(1) es falsa**.

Por otro lado,

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \cdot \frac{1-x^2}{x^2+1}.$$

Como el coseno es positivo en $(-1, 1)$, tenemos que

- $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$,
- $f' > 0$ en $(-1, 1)$
- $f' < 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

En particular, f es decreciente en $(1, +\infty)$, por lo que **(4) es verdadera**. Mirando el punto crítico -1, vemos (a partir del signo de f') que f decrece a la izquierda de -1 y crece a la derecha, por lo que f tiene un mínimo relativo en -1. Del mismo modo vemos que f tiene un máximo relativo en 1. Por lo tanto **(5) es falsa**.

Nos falta decidir si f tiene mínimo absoluto. Como el único mínimo relativo está en -1, este punto es nuestro único "candidato" a mínimo absoluto. Observemos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0,$$

por lo que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Como $f(-1) < 0$, podemos tomar un intervalo grande $[-K, K]$ tal que $f(x) > f(-1)$ en $(-\infty, K] \cup [K, +\infty)$. Por el teorema de Weierstrass, f tiene mínimo absoluto en I. No se puede dar en los extremos, por lo que necesariamente se da en -1. Fuera de $[-K, K]$, $f(x) > f(-1)$, por lo que $f(-1)$ es el mínimo absoluto de f. Esto es, **(3) es falsa**.

MO

Ejercicio 1

Se calcula una primitiva de $f(x) = x \log(\sqrt{x^2+1})$ del siguiente modo:
Haciendo el cambio de variable $u = x^2 + 1$,

$$\int x \log(\sqrt{x^2+1})\, dx = \frac{1}{2} \int \log(\sqrt{u})\, du.$$

Como $\log(u^\alpha) = \alpha \log(u)$, esto es

$$\frac{1}{4} \int \log(u)\, du.$$

Se halla una primitiva del logaritmo integrando por partes, como se hizo en el teórico. Es

$$g(u) = u(\log(u) - 1).$$

Deshaciendo el cambio de variable, una primitiva de f es

$$h(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)(\log(x^2+1) - 1).$$

Finalmente, $\int_0^1 f(x)\, dx = h(1) - h(0) = \frac{1}{4}(2\log(2) - 1) = \frac{1}{2}\log(2) - \frac{1}{4} = \log(\sqrt{2}) - \frac{1}{4}$. **La respuesta correcta es B.**

Ejercicio 2

Las primeras tres derivadas de f son $f'(x) = 6xe^{x^2-1}$, $f''(x) = 6(2x^2+1)e^{x^2-1}$, $f'''(x) = 12x(2x^2+3)e^{x^2-1}$. Por lo tanto $f(1) = 3$, $f'(1) = 6$, $f''(1) = 18$ y $f'''(1) = 60$, y el polinomio de Taylor de f de orden 3 en el punto 1 es

$$p(x) = 3 + 6(x-1) + 9(x-1)^2 + 10(x-1)^3.$$

Escrito así, no parece ninguna de las opciones. Desarrollando las potencias de $x - 1$ y agrupando los monomios del mismo grado, queda

$$p(x) = -4 + 18x - 21x^2 + 10x^3,$$

que es la respuesta D.

Ejercicio 3

Como la función seno es acotada, $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x) = 0$, por lo que f es continua en 0.
La derivada de f en 0 es

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x) = 0.$$

En particular, f es derivable en 0.
Para $x \neq 0$, $f'(x)$ se calcula usando la fórmula de la derivada del producto y la regla de la cadena. Es

$$f'(x) = 2x\operatorname{sen}(1/x) + x^2 \cos(1/x)(-\frac{1}{x^2}) = 2x\operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x).$$

Esta función no tiene límite cuando $x \to 0$, por lo que f' no es continua en 0. Por lo tanto, **la respuesta correcta es C**.

Ejercicio 4

La afirmación (I) no es necesariamente verdadera. Mediante un dibujo, es posible convencerse de que hay una función impar que toma los valores pedidos y no cumple esto (y este es el objetivo de esta pregunta). Se podría, por ejemplo, tomar una función que en $[-1, 1]$ coincida con la función identidad y, siendo derivable, valga 4 en $x = 2$.

La afirmación (II) es verdadera. Como f es impar, $f(0) = 0$. Si aplicamos el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[0, 2]$, vemos que hay un punto en $(0, 2)$ donde la derivada vale $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = 2$.

La afirmación (III) es verdadera. Si aplicamos el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[1, 2]$, obtenemos un punto $c \in (1, 2)$ donde la derivada vale 3. Como $f(x) = -f(-x)$, $f'(x) = -(-f'(-x)) = f'(-x)$, es decir, f' es par. Por lo tanto, $f'(-c)$ también vale 3.

Por lo tanto, **la respuesta correcta es C**.

Desarrollo

Ejercicio 1

La superficie a construir es

$$S(R, h) = 2\pi R^2 + 2\pi Rh + \pi R^2.$$

Como el volumen del silo es V_0, R y h deben satisfacer la relación

$$\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 h = V_0.$$

Esto nos permite calcular h en función de R, lo que nos da

$$h = \frac{V_0}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R.$$

Sustituyendo esta expresión, la superficie a construir es

$$S(R) = 3\pi R^2 + \frac{2V_0}{R} - \frac{4}{3}\pi R^2 = \frac{5}{3}\pi R^2 + \frac{2V_0}{R}.$$

Queremos hallar el valor de R que minimiza $S(R)$. Como $S'(R) = \frac{10}{3}\pi R - \frac{2V_0}{R^2}$, vemos que

$$S'(R) = 0 \iff R^3 = \frac{3V_0}{5\pi} \iff R = \sqrt[3]{\frac{3V_0}{5\pi}}.$$

$S'(R) > 0$ para $R > \sqrt[3]{\frac{3V_0}{5\pi}}$ y $S'(R) < 0$ para $R < \sqrt[3]{\frac{3V_0}{5\pi}}$, por lo que $S(R)$ tiene un único mínimo que se da exactamente en $R = \sqrt[3]{\frac{3V_0}{5\pi}}$.

Ejercicio 2

(a) Ver teórico. Se espera que se enuncie el teorema del valor medio para integrales, y que se utilice éste para probar el Teorema Fundamental del Cálculo.

(b) Por la parte anterior, $F'(x) = f(x) > 0$, y, como se vio en el teórico, esto implica que F es estrictamente creciente. Esto a su vez implica que F es inyectiva, por lo cual es invertible sobre su imagen.

(c) La fórmula para la derivada de la función inversa nos dice que

$$(F^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{F'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = 5.$$