Cálculo diferencial e integral en una variable

2do semestre de 2017

Segundo parcial

25 de noviembre de 2017

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del parcial es de tres horas y media, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: tenga cuidado al pasar las respuestas.
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 20 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**

Correctas: 5 puntos. Incorrectas: -1,25 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 40 puntos)

Dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la hoja 3.

SÓLO PARA USO DOCENTE

D1.1	D1.2	D1.3	D2.1	D2.2	D2.3	Total

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 20 puntos)

1. El valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{sen}(x)e^{\mathrm{sen}(x)}\,dx$ es

(A) 0
(B) 1
(C) $e-1$
(D) $e^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-1)+1$
(E) $e^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-1)$

2. Dados $a,b\in\mathbb{R}$, se considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} e^{\mathrm{sen}(x)} & \text{si } x\le\frac{\pi}{2} \\ ax^2+bx & \text{si } x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

Entonces los valores a, b para los que f es continua y derivable en $x=\frac{\pi}{2}$ son:

(A) $a=\frac{4e}{\pi^2}-\frac{2}{\pi}$ y $b=e+2-\frac{4e}{\pi^2}$
(B) No existen valores a,b que verifiquen esto
(C) $a=\frac{-4e}{\pi^2}$ y $b=\frac{4e}{\pi}$
(D) $a\in\mathbb{R}$ cualquiera y $b=-\frac{a}{\pi}$
(E) $a\in\mathbb{R}$ cualquiera y $b=\frac{2e}{\pi}-\frac{a\pi}{2}$

3. Se considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ y las tres afirmaciones:

I. f es derivable en todo punto $x_0\in\mathbb{R}$.
II. f tiene máximo absoluto en $\mathbb{R}$.
III. Existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=1/\sqrt{2}$.

(A) I y II son verdaderas; III es falsa.
(B) I y III son verdaderas; II es falsa.
(C) II y III son verdaderas; I es falsa.
(D) II es verdadera; I y III son falsas.
(E) III es verdadera; I y II son falsas.

4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. El máximo intervalo I de definición de la función inversa $f^{-1}:I\to\mathbb{R}$ y su derivada son:

(A) $I=\mathbb{R}$ y $(f^{-1})'(x)=\sqrt{1+x^2}$
(B) $I=(-1,1)$ y $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(C) $I=\mathbb{R}$ y $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
(D) $I=(-1,1)$ y $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{1-x^2}$
(E) $I=\mathbb{R}$ y $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

Sugerencia: Observar que $(f'(x))^2=(f(x))^2+1$ y usar esta relación. (Se puede proceder análogamente a lo visto en el teórico al calcular la derivada de la función $\mathrm{arcsen}=\mathrm{sen}^{-1}$.)

Ejercicios de desarrollo (Total: 40 puntos)

Recordatorio: está prohibido usar un lápiz para escribir el texto de la respuesta. Única excepción: se podrá usar el lápiz para trazar figuras. A la hora de corregir, sólo se tendrá en cuenta el texto escrito con lapicera, y todo texto escrito con un lápiz será ignorado por el corrector.

Los razonamientos deberán estar correctamente fundamentados en la teoría desarrollada en el curso, enunciando los teoremas usados y justificando su aplicación.

Primer ejercicio de desarrollo (20 puntos)

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Completar la siguiente definición:

   f tiene máximo absoluto en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si y sólo si...

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Demostrar que si f tiene máximo absoluto en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x_0) = 0$.

El siguiente es un problema real: se debe traducir primero a un problema matemático y luego aplicar los conocimientos del curso para resolverlo. Se pide así que se explique cómo se llegó a ese modelado matemático.

3. La restricción para el equipaje de bodega en la aerolínea X es de 160 cm. Esto quiere decir que la suma de las dimensiones de una valija (alto + ancho + espesor) debe ser menor o igual a 160 cm. A su vez, por cuestiones de comodidad, las valijas deben cumplir que el alto y el espesor estén en una relación de entre 2,5 a 1 y 3 a 1.

   Determinar las dimensiones de una valija de forma que:

   - La suma de sus dimensiones sea igual a 160 cm.
   - El alto sea tres veces el espesor.
   - El volumen sea el mayor posible con las restricciones anteriores.

Segundo ejercicio de desarrollo (20 puntos)

1. Sean una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Completar la siguiente definición:

   f es derivable en x_0 si y sólo si... Y en ese caso, la derivada de f en x_0 es...

2. Dados una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto $a \in \mathbb{R}$, demostrar que la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R})$$

   es derivable en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$, y que $F'(x_0) = f(x_0)$ (Teorema fundamental).

   Aclaración: no es necesario demostrar que la función f es integrable.

3. Sea la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \displaystyle\int_0^{\cos x} e^{t^2}\, dt$.
   Calcular la derivada de la función G, justificando los cálculos.