

Ejercicio 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + (1-a)x^2 + x - 2}{bx^3 + (1-b)x^2 + x - 2}$.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + (1-a)x^2 + x - 2}{bx^3 + (1-b)x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax^2 + x + 2)}{(x-1)(bx^2 + x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x + 2}{bx^2 + x + 2} = \frac{a+3}{b+3}$$

Letra	Opción correcta
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{-x^3 + 2x^2 + x - 2}$	A
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{2x^3 - x^2 + x - 2}$	B
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{-x^3 + 2x^2 + x - 2}$	C
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^3 + x - 2}$	D
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 + x - 2}{-x^3 + 2x^2 + x - 2}$	E
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 + x - 2}{2x^3 - x^2 + x - 2}$	F

- (A) 2
- (B) 4/5
- (C) 5/2
- (D) 5/4
- (E) 3
- (F) 6/5

Ejercicio 2

Calcular el volumen de revolución obtenido al girar el gráfico de la función $f(x) = a + bx^2$ alrededor del eje x sobre el intervalo $[-1, 1]$.

Solución: Recordar que $\text{vol}(V_x) = \int_{-1}^1 \pi (f(x))^2 dx$. En este caso:

$$\text{vol}(V_x) = \pi \int_{-1}^1 (a + bx^2)^2 dx = 2\pi \left(a^2 + \frac{2ab}{3} + \frac{b^2}{5} \right)$$

Letra	Opción correcta
$f(x) = 1 + x^2$	A
$f(x) = 1 + 2x^2$	B
$f(x) = 2 + x^2$	C
$f(x) = 2 + 2x^2$	D
$f(x) = 3 + x^2$	E
$f(x) = 3 + 2x^2$	F

- (A) $56\pi/15$
- (B) $94\pi/15$
- (C) $166\pi/15$
- (D) $224\pi/15$
- (E) $112\pi/5$
- (F) $138\pi/5$

Ejercicio 3

Calcular la suma superior de la función $f(x) = 1/x$ correspondiente a la partición en tres partes iguales del intervalo $[1, n]$.

Solución:

Sea $P = \{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ con $t_0 = 1, t_1 = 1 + \frac{n-1}{3}, t_2 = 1 + 2\frac{n-1}{3}$ y $t_3 = n$. Como f es decreciente,

$$S^*(f, P) = (f(t_0) + f(t_1) + f(t_2)) \frac{n-1}{3} = \left(1 + \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) \frac{n-1}{3} = \left(1 + \frac{3}{n+2} + \frac{3}{2n+1}\right) \frac{n-1}{3}$$

Letra	Opción correcta
[1, 2]	A
[1, 4]	B
[1, 7]	C
[1, 10]	D
[1, 13]	E
[1, 16]	F

(A) 47/60

(D) 117/28

(B) 11/6

(E) 236/45

(C) 46/15

(F) 415/66

Ejercicio 4

Calcular la coordenada x del punto de intersección entre la recta $y = 0$ y la recta tangente en $(a, a^3 - b)$ a la curva $y = x^3 - b$.

Solución:

La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto de coordenadas $(a, f(a))$ es:

$$\begin{aligned} r: \quad y &= f(a) + f'(x)(x - a) \\ &= a^3 - b + 3a^2(x - a) \\ &= 3a^2x - (2a^3 + b) \end{aligned}$$

Si $A = 3a^2$ y $B = -(2a^3 + b)$, buscamos x_0 tal que $Ax_0 + B = 0$. Entonces tiene que ser:

$$x_0 = \frac{-B}{A} = \frac{2a^3 + b}{3a^2}.$$

Letra	Opción correcta
(2, 7) a la curva $y = x^3 - 1$	A
(2, 6) a la curva $y = x^3 - 2$	B
(2, 5) a la curva $y = x^3 - 3$	C
(3, 26) a la curva $y = x^3 - 1$	D
(3, 25) a la curva $y = x^3 - 2$	E
(3, 24) a la curva $y = x^3 - 3$	F

- (A) 17/12 (B) 3/2 (C) 19/12 (D) 55/27 (E) 56/27 (F) 19/9

Ejercicio 5

Se caminan 12 kilómetros subiendo una pendiente de inclinación α y luego 4 bajando por una de inclinación β (ambos ángulos medidos desde la horizontal).

Calcular la altura en kilómetros que se ganó al final del recorrido.

Solución:

Si h_1 es la primer altura conseguida, entonces $h_1 = 12 \sin(\alpha)$. Si h_2 es la altura que descien- de luego, $h_2 = 4 \sin(\beta)$. Entonces la altura final es:

$$h_f = h_1 - h_2 = 12 \sin(\alpha) - 4 \sin(\beta).$$

Letra	Opción correcta
15° y luego 4 bajando por una de inclinación 15°	A
15° y luego 4 bajando por una de inclinación 30°	B
15° y luego 4 bajando por una de inclinación 45°	C
30° y luego 4 bajando por una de inclinación 15°	D
30° y luego 4 bajando por una de inclinación 30°	E
30° y luego 4 bajando por una de inclinación 45°	F

(A) $2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

(D) $6 - \sqrt{6} + \sqrt{2}$

(B) $3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 2$

(E) 4

(C) $3\sqrt{6} - 5\sqrt{2}$

(F) $6 - 2\sqrt{2}$

Ejercicio 6

Calcular el máximo de la función $f(x) = 2x^3 - 3(a+b)x^2 + 6abx - 6$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución:

Como f es continua en el intervalo cerrado $[-2, 2]$, existe $M = \max \{f(-2), f(2), f(p) : p \text{ es punto crítico de } f \text{ en } [-2, 2]\}$. En este caso $f'(x) = 0$ solo si $x = a$ ó $x = b$. Entonces:

$$M = \max \{f(-2), f(2), f(a), f(b) \text{ si } -2 \leq a \leq 2 \text{ y } -2 \leq b \leq 2\}$$

Letra	Opción correcta
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x - 6$	A
$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 6$	B
$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 72x - 6$	C
$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x - 6$	D
$f(x) = 2x^3 - 6x - 6$	E
$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 6$	F

(A) 110

(D) 38

(B) 7

(E) -2

(C) 70

(F) 10

Ejercicio 7

Calcular $F'(c)$ donde $F(x) = \int_0^{bx} e^{t^2} t \sin(t) dt$.

Solución:

Por el teorema fundamental del cálculo,

$$F(x) = \int_0^{bx} e^{t^2} t \sin(t) dt \Rightarrow F'(x) = e^{b^2 x^2} bx \sin(bx) b \text{ y } F'(c) = b^2 c e^{b^2 c^2} \sin(bc).$$

Letra	Opción correcta
$F'(1)$ donde $F(x) = \int_0^{3x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	A
$F'(1)$ donde $F(x) = \int_0^{4x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	B
$F'(1)$ donde $F(x) = \int_0^{5x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	C
$F'(2)$ donde $F(x) = \int_0^{3x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	D
$F'(2)$ donde $F(x) = \int_0^{4x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	E
$F'(2)$ donde $F(x) = \int_0^{5x} e^{t^2} t \sin(t) dt$	F

(A) $9e^9 \sin(3)$

(D) $18e^{36} \sin(6)$

(B) $16e^{16} \sin(4)$

(E) $32e^{64} \sin(8)$

(C) $25e^{25} \sin(5)$

(F) $50e^{100} \sin(10)$

Ejercicio 8

Calcular c en $[0, 4]$ tal que $f(c) = \frac{1}{4} \int_0^4 f(x) dx$ donde $f(x) = ax + |x - 2|$.

Solución:

Discutiendo según si $x < 2$ o no obtenemos

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ (a+1)x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calculamos $f(0) = 2, f(2) = 2a, f(4) = 4a + 2$ y observando que entre esos puntos el gráfico de f es una recta obtenemos sumando el área de dos trapecios que

$$\int_0^4 f(x) dx = 2 \frac{2+2a}{2} + 2 \frac{2a+4a+2}{2} = 8a+4.$$

Por lo tanto buscamos c para que $f(c) = 2a + 1$.

Como en todos los casos $a \geq 2$ y f es creciente esto ocurre con $c > 2$ y obtenemos la ecuación $f(c) = (a+1)c - 2 = 2a + 1$ de donde $c = \frac{2a+3}{a+1}$.

Letra	Opción correcta
$f(x) = 2x + x - 2 $	A
$f(x) = 3x + x - 2 $	B
$f(x) = 4x + x - 2 $	C
$f(x) = 5x + x - 2 $	D
$f(x) = 6x + x - 2 $	E
$f(x) = 7x + x - 2 $	F

(A) 7/3

(D) 13/6

(B) 9/4

(E) 15/7

(C) 11/5

(F) 17/8