Cálculo diferencial e integral en una variable

Primer semestre de 2018

Solución Primer parcial – Mayo de 2018

Ejercicios: Múltiple opción

Respuestas:

Para distinguir las versiones hacemos referencia al primer ejercicio.

Versión 1: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que...

1	2	3	4
A	C	B	C

Versión 2: Se considera $f(x) = \frac{\sqrt{x}-b}{x^2-1}$. Si $\lim_{x\to 1} f(x) = c \in \mathbb{R}$...

1	2	3	4
E	A	C	B

Versión 3: Sean A, B subconjuntos acotados y no vacíos de $\mathbb{R}$...

1	2	3	4
E	C	B	D

Versión 4: Sea $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable...

1	2	3	4
C	A	D	E

Resolución:

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Si f es continua en 1 y $\int_0^3 f(x)\,dx = 0$, entonces los valores de a y b son:

(A) $a = 6$, $b = -4$.

(B) No existen a, b que cumplan estas condiciones.

(C) $a = 2$, $b = 0$.

(D) $a = 0$, $b = 2$.

(E) $a = -3$, $b = -1$.

Solución:

En primer lugar, como sabemos que f es continua en $x = 1$ se debe cumplir que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Calculemos cada una de estas cantidades:

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax^2 + b = a + b.$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x + 3 = 2.$
- $f(1) = 2.$

Se obtiene, entonces, la siguiente restricción:

$$a + b = 2 \tag{1}$$

Por otra parte, sabemos que $\int_0^3 f(x)\,dx = 0$. Utilizando la aditividad según el intervalo de la integral obtenemos:

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 ax^2 + b\ dx}_{\text{(I)}} + \underbrace{\int_1^3 -x + 3\ dx}_{\text{(II)}}$$

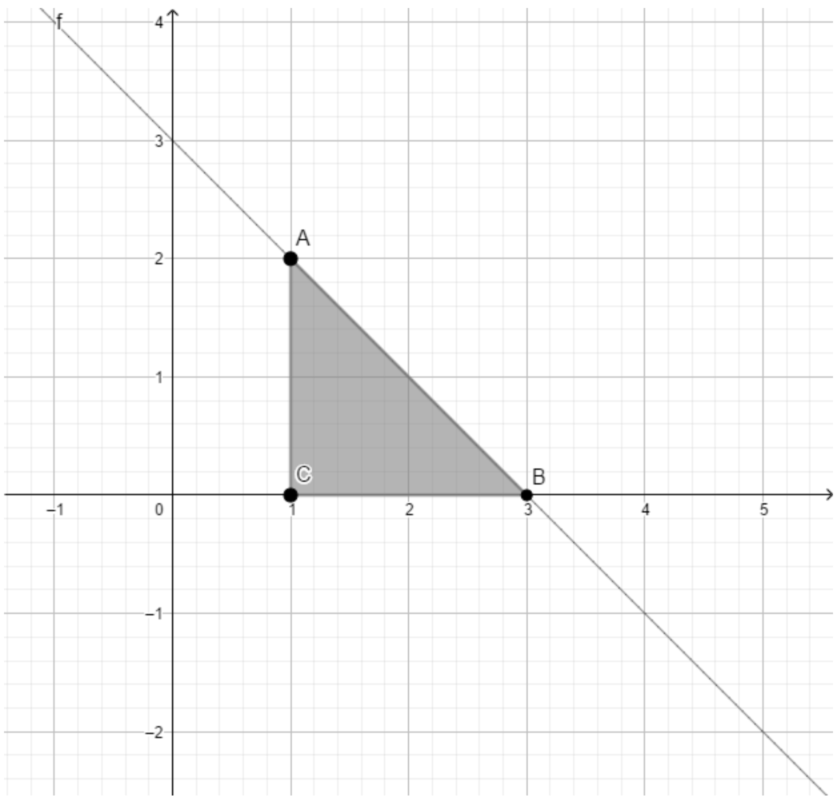
Calculemos cada una de las integrales por separado. Para calcular (I) recordamos que

$$\int_0^m x^2\ dx = \frac{m^3}{3}$$

y obtenemos:

$$\text{(I)} = \int_0^1 ax^2 + b\ dx = \int_0^1 ax^2\ dx + \int_0^1 b\ dx = a\int_0^1 x^2\ dx + b(1-0) = a\left(\frac{1^2}{3}\right) + b = \frac{a}{3} + b$$

Para calcular (II) observemos que $\int_1^3 -x + 3\,dx$ es el área del siguiente triángulo:



Podemos calcular esta integral utilizando que la base del triángulo es 2 y la altura es también 2. Luego,

$$(\text{II}) = \int_1^3 -x + 3\; dx = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

Se obtiene la segunda restricción:

$$\int_0^3 f(x)\, dx = \frac{a}{3} + b + 2 = 0 \tag{2}$$

Combinando las restricciones (1) y (2) se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ \frac{a}{3} + b = -2 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación con la primera obtenemos:

$$\frac{-2a}{3} = -4 \Rightarrow -2a = -12 \Rightarrow \boxed{\text{a = 6}}$$

Sustituyendo esto último en la primera ecuación hallamos b:

$$6 + b = 2 \Rightarrow \boxed{\text{b = -4}}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es: $a = 6, b = -4$

2. Sean A, B subconjuntos acotados y no vacíos de $\mathbb{R}$, $\alpha = \inf(A)$ y $\beta = \sup(B)$.
Se consideran las siguientes afirmaciones:

I. El número $h = \alpha - 1$ es una cota inferior de A.

II. $A \subseteq (\alpha, \beta)$.

III. Si $A \subseteq B$ entonces $\alpha \geq \inf(B)$ y $\beta \leq \sup(A)$.

Indique la opción correcta:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(B) Todas las afirmaciones son falsas.
(C) I. es verdadera, II. y III. son falsas.
(D) I. y III. son verdaderas y II es falsa.
(E) I. es falsa, II. y III. son verdaderas.

Solución:

I. Como α es cota inferior de A y $\alpha - 1 < \alpha$, entonces $h = \alpha - 1$ es cota inferior de A. Luego I. es verdadera.

II. Sean $A = B = \{0, 1\}$, en este caso $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, pero $A \bigcap (\alpha, \beta) = \emptyset$. Luego II. es falsa.

III. Sean $A = \{0\}$ y $B = \{0, 1\}$. Tenemos que $A \subseteq B$, además $\beta = 1$ y $sup(A) = 0$, por lo que $\beta > sup(A)$. Luego III. es falsa.

Podemos concluir que sólo la primer afirmación es verdadera.

3. Sea $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, se consideran las siguientes afirmaciones:

I. Existe una partición P de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) - S_*(f, P) < 1/100$.

II. Sea P una partición del intervalo $[2, 4]$. Si se tiene que $S^*(f, P) < 0$ entonces $\int_2^4 f(t)\, dt < 0$.

III. Si $\int_{-2}^{0} f(t)\, dt = 8$ entonces existe $c \in [-2, 0]$ tal que $f(c) \geq 3$.

Indique la opción correcta:

(A) Todas las afirmaciones son falsas.
(B) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(C) I. es verdadera, II. y III. son falsas.
(D) I. y III. son verdaderas y II es falsa.
(E) I. es falsa, II. y III. son verdaderas.

Solución:

I. Como se demostró en teórico: si se tiene una función integrable en un intervalo compacto $[a, b]$, dado $\epsilon > 0$ existe una partición del intervalo $[a, b]$ tal que la diferencia entre la suma superior e inferior asociada a dicha particiño es menor a ϵ. Entonces, tomando $\epsilon = 1/100$ y aplicando el lema antes mencionado se obtiene que es válida la afirmación I.

II. Si una función definida en un intervalo compacto es integrable entonces la integral de la función es el ínfimo del conjunto de las sumas superiores asociadas a la función. Como hay un elemento del conjunto de las sumas superiores que es negativo entonces su ínfimo es menor que 0. Entonces la afirmación II es válida.

III. La afirmación III también es correcta. Supóngase que 3 es una cota superior de la función. Entonces para toda partición se tiene que la suma superior asociada a dicha partición es menor a 6. Entonces la integral de la función en cuestión es menor o igual a 6, cosa que es una contradicción.

4. Se considera $f(x) = \frac{\sqrt{x}-b}{x^2-1}$. Si $\lim_{x\to 1} f(x) = c \in \mathbb{R}$, entonces b y c son:

(A) $b = 1$, $c = 1$.
(B) $b = 1$, $c = 1/2$.
(C) $b = 1$, $c = 1/4$.
(D) Para todo b existe el límite y se cumple $b = c$.
(E) Ningún par b, c cumple lo pedido.

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - b}{x^2 - 1} = c$$

Como x^2-1 tiende a 0, para que exista el límite y sea igual a $c \in \mathbb{R}$, debe ser que $\sqrt{x}-b$ tienda a 0, con lo cual se obtiene que $b=1$

Entonces:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-b}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}\underbrace{=}_{x^2-1=(x+1)(x-1)}\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{4}$$

De este modo se obtiene que $c=\frac{1}{4}$.

Ejercicios de desarrollo.

Primer ejercicio de desarrollo.

Demostrar que:

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2}<2-\frac{1}{n},\quad \forall n\geq 2$$

Solución: La desigualdad:

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2}<2-\frac{1}{n}\quad,\quad \forall n\geq 2 \tag{3}$$

la demostraremos por inducción. Como $n\geq 2$ el paso base es para $n=2$, en el cual tenemos la desigualdad:

$$\frac{1}{4}<2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$$

que obviamente es cierta.

Supongamos que la desigualdad (3) vale para n, entonces nos queda demostrarla para $n+1$ (en lugar de n). En este caso la desigualdad toma forma:

$$\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i^2}<2-\frac{1}{n+1}. \tag{4}$$

Usando la hipótesis de inducción, que vale la desigualdad (3), para el lado izquierdo en (4) tenemos:

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\overset{(3)}{<}2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2n(n+1)^2-(n+1)^2+n}{n(n+1)^2}=\frac{2n^3+3n^2+n-1}{n(n+1)^2}.$$

Si logramos probar que el último término a la derecha en la expresión anterior es menor o igual que el término a la derecha en (4), o sea que se cumpla que:

$$\frac{2n^3+3n^2+n-1}{n(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1},$$

entonces hemos probado la desigualdad (4). Multiplicando esta última desigualdad por $n(n+1)^2$ tenemos que la misma es equivalente a:

$$2n^3+3n^2+n-1 \leq 2n^3+3n^2+n \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 \leq 0$$

lo que es cierto.

Segundo ejercicio de desarrollo.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ tal que $x \leq 10$ para todo $x \in S$.

1. Justificar por qué existe $\alpha = \sup(S)$.
2. Probar que si $\alpha \notin S$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $\alpha - \epsilon < x < \alpha$. Si utiliza un resultado visto en el teórico, demuéstrelo.
3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(\alpha) = 1$ y $f(x) = 1/2$ para todo $x \in S$. Probar que si $\alpha \notin S$, entonces f no es continua en α.

Solución:

1. Como S es un subconjunto no vacío de los números reales acotado superiormente, (10 es una cota superior) el axioma de completitud asegura la existencia del supremo de S.
2. Razonemos por absurdo y veamos cómo la negación de lo que queremos probar nos lleva a una contradicción. La negación sería: $\exists\ \epsilon_0 > 0$ tal que $\forall\ x \in S$ se tiene que $x \notin (\alpha - \epsilon_0, \alpha)$ Esto quiere decir que $S \subseteq (-\infty, \alpha - \epsilon_0] \cup [\alpha, +\infty)$. Como α es cota superior de S (por ser supremo de S) tenemos que $S \cap (\alpha, +\infty) = \emptyset$. Además por hipótesis $\alpha \notin S$ y entonces tenemos que $S \cap [\alpha, +\infty) = \emptyset$, lo que permite concluir que $S \subseteq (-\infty, \alpha - \epsilon_0]$. Ahora, esto nos lleva a una contradicción, ya que en dicho caso, $\alpha - \epsilon_0$ sería una cota superior de S estrictamente menor $\alpha = sup(S)$. Entonces nuestra suposición era falsa y se cumple la afirmación.
   También se podía usar (demostrando previamente) la propiedad fundamental del supremo, de la siguiente manera:
   Por la Propiedad fundamental del supremo, para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $\alpha - \epsilon < x \leq \alpha$ (notar que la segunda desigualdad no es estricta y se nos pide encontrar un x que cumple ambas desigualdades en forma estricta). Ahora, por hipótesis tenemos que $\alpha \notin S$, entonces $x \neq \alpha$ por lo que tenemos $\alpha - \epsilon < x < \alpha$ como queríamos.
3. Para ver que f no es continua en α, tenemos que probar que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a α no es $f(\alpha) = 1$. Para esto, (negando la definición de límite) debemos probar que existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, podemos encontrar un $x_\delta \in E^\star(\alpha, \delta)$ que cumple $f(x_\delta) \notin E(1, \epsilon)$. Veamos que $\epsilon = 1/4$ nos sirve. Dado $\delta > 0$ debemos entonces, encontrar nuestro x_δ. Como α es el supremos de S y $\alpha \notin S$, la parte anterior dice que existe un $x \in S$ tal que $\alpha - \delta < x < \alpha$. Dicho x es el x_δ buscado ya que $x \in E^\star(\alpha, \delta)$ y (por la definición de f) $f(x) = 1/2 \notin E(1, 1/4)$.