Cálculo diferencial e integral en una variable

2do semestre de 2017

Solución del primer parcial

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 20 puntos)

Ejercicio 1 Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados. Se define $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$ y se considera la siguiente demostración de la igualdad $\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$, donde los símbolos y las palabras que faltan están indicados por rectángulos numerados:

> Para todo $z \in A + B$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $z = x + y$, y como $x \boxed{\mathbf{1}} \sup(A)$ e $y \boxed{\mathbf{1}} \sup(B)$, tenemos que $z = x + y \boxed{\mathbf{1}} \sup(A) + \sup(B)$.
> Entonces $\sup(A) + \sup(B)$ es una cota $\boxed{\quad \mathbf{2} \quad}$ del conjunto $A + B$.
> Por lo tanto, tenemos que $\sup(A + B) \boxed{\mathbf{3}} \sup(A) + \sup(B)$.
>
> Además, para todo $\varepsilon > 0$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $x \boxed{\mathbf{4}} \sup(A) \boxed{\mathbf{5}} \varepsilon/2$ e $y \boxed{\mathbf{4}} \sup(B) \boxed{\mathbf{5}} \varepsilon/2$, entonces:
> $\sup(A) + \sup(B) \boxed{\mathbf{6}} x + y \boxed{\mathbf{7}} \varepsilon \boxed{\mathbf{6}} \sup(A + B) \boxed{\mathbf{7}} \varepsilon$.
> Por lo tanto, tenemos que $\sup(A) + \sup(B) \boxed{\mathbf{8}} \sup(A + B)$.

Indicar la opción que permite completar la demostración de modo adecuado...

Solución: La demostración correcta es la siguiente:

> Para todo $z \in A + B$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $z = x + y$, y como $x \boxed{\leq} \sup(A)$ e $y \boxed{\leq} \sup(B)$, tenemos que $z = x + y \boxed{\leq} \sup(A) + \sup(B)$.
> Entonces $\sup(A) + \sup(B)$ es una cota $\boxed{\text{superior}}$ del conjunto $A + B$.
> Por lo tanto, tenemos que $\sup(A + B) \boxed{\leq} \sup(A) + \sup(B)$.
>
> Además, para todo $\varepsilon > 0$, existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $x \boxed{\geq} \sup(A) \boxed{-} \varepsilon/2$ e $y \boxed{\geq} \sup(B) \boxed{-} \varepsilon/2$, entonces:
> $\sup(A) + \sup(B) \boxed{\leq} x + y \boxed{+} \varepsilon \boxed{\leq} \sup(A + B) \boxed{+} \varepsilon$.
> Por lo tanto, tenemos que $\sup(A) + \sup(B) \boxed{\leq} \sup(A + B)$.

Así, la opción correcta era: **1:** $\boxed{\leq}$ **2:** $\boxed{\text{superior}}$ **3:** $\boxed{\leq}$ **4:** $\boxed{\geq}$ **5:** $\boxed{-}$ **6:** $\boxed{\leq}$ **7:** $\boxed{+}$ **8:** $\boxed{\leq}$

Ejercicio 2 La integral $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x} \right) dx$ vale: ...

Solución: Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x} \right) dx &= \int_1^2 \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^2 x^2\, dx - 3 \int_1^2 x\, dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\
&= \left(\frac{2^3 - 1^3}{3} \right) - 3 \left(\frac{2^2 - 1^2}{2} \right) + \big(\log 2 - \log 1\big) \\
&= \frac{7}{3} - \frac{9}{2} + \log 2 = \boxed{\log 2 - \frac{13}{6}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3 Dados números $a, b \in \mathbb{R}$, se consideran las siguientes afirmaciones:

I. Si $a \leq b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a < b$.
II. Si $a < b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.
III. Si $|a - b| \leq 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a = b$.

Indicar la opción correcta: ...

Solución: Se observa que:

- I. es falsa. Contraejemplo: $a = b = 0$.
- II. es verdadera. (Véase el curso.)
- III. es verdadera. En efecto, si $|a - b| \leq 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $|a - b| \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Y vimos en el curso que esto implica que $a = b$.

Entonces, la opción correcta era $\boxed{\text{II y III son verdaderas; I es falsa}}$

Ejercicio 4 Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que
$\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 6$ y $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 1$. Entonces: ...

Solución: Por hipótesis, sabemos que $\lim_{x \to 0} |f(x)| = 6$. Entonces la función $|f|$ está acotada en un entorno de 0, lo que implica que f está acotada en el mismo entorno de 0. Por otro lado, sabemos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 1$. Y como $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, se deduce que

$$\lim_{x \to 0} g(x) \;=\; \lim_{x \to 0} \left(\frac{g(x)}{x} \times x \right) \;=\; 1 \times 0 \;=\; 0\,.$$

Así, la función fg es el producto de una función f acotada en un entorno del punto 0 por otra función g que tiene límite nulo en el mismo punto. Por lo tanto: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x)g(x) = 0}$

Ejercicio de desarrollo (Total: 20 puntos)

En lo siguiente, se puede usar (sin demostración) el criterio de integrabilidad "a menos de ε":

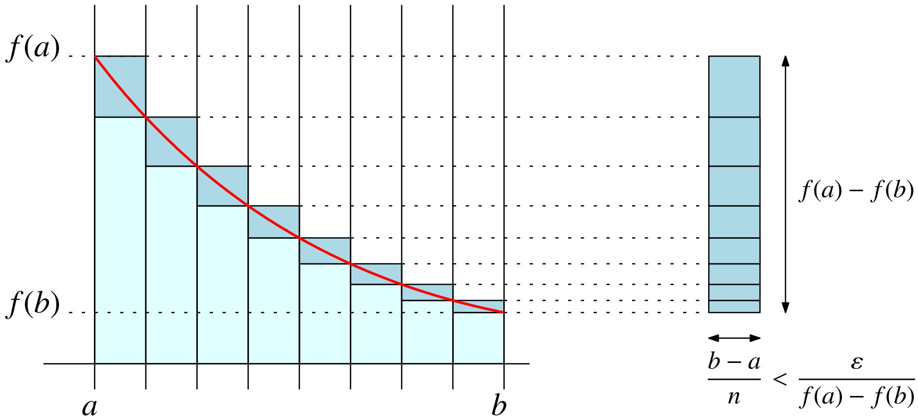
> *Para toda función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$), las siguientes dos condiciones son equivalentes:*
>
> *(i) La función f es integrable en el intervalo $[a, b]$.*
> *(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $P \subset [a, b]$ tal que $0 \leq S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon$.*
>
> *(donde $S_*(f, P)$ y $S^*(f, P)$ designan la suma inferior y la suma superior de la función f respecto a la partición $P \subset [a, b]$).*

1. Usando el criterio de integrabilidad a menos de ε, demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona decreciente, entonces f es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Solución: Cómo la función f es monótona decreciente en el intervalo $[a,b]$, está acotada entre $f(b)$ y $f(a)$ (pues $f(b) \le f(t) \le f(a)$ para todo $t \in [a,b]$). En el caso particular donde $f(a) = f(b)$, la función f es constante, entonces es obviamente integrable. A partir de ahora, se supone que $f(a) > f(b)$. Para demostrar que la función f es integrable, se usa el criterio de integrabilidad a menos de ε. Dado $\varepsilon > 0$ fijado, se puede hallar un entero $n \ge 1$ suficientemente grande para que $\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)}$ (por el principio de Arquímedes). Luego se considera la partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a,b]$ definida por

$$a_i \;=\; a + i \cdot \frac{b-a}{n} \qquad \text{(para todo } i = 0, \ldots, n)$$

de tal modo que todos los subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ tengan la misma longitud $(b-a)/n$.



Ahora, se observa que en cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, la función f es monótona decreciente, de tal modo que $\inf(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_{i+1})$ mientras $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_i)$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 \;\le\; S^*(f,P) - S_*(f,P) \;&=\; \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_i) \;-\; \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_{i+1}) \\
&=\; \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(f(a_i)-f(a_{i+1})) \;=\; \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(f(a_i)-f(a_{i+1})) \\
&=\; \frac{b-a}{n}\cdot(f(a)-f(b)) \;<\; \frac{\varepsilon}{f(a)-f(b)}\cdot(f(a)-f(b)) \;=\; \varepsilon
\end{aligned}$$

(véase figura anterior). Así para cada $\varepsilon > 0$, demostramos que existe una partición $P \subset [a,b]$ tal que $0 \le S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$. Por el criterio de integrabilidad a menos de ε, se deduce que la función f es integrable.

2. Dados dos números $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$, demostrar que la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1/t$ para todo $t > 0$ es integrable en el intervalo $[a,b]$.

Solución: Vimos en **1.** que toda función monótona decreciente en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$. Así, para establecer que la función $f(t) = 1/t$ es integrable en el intervalo $[a,b]$, basta con demostrar que f es monótona decreciente en dicho intervalo. Para ello, se consideran dos números $t, u \in [a,b]$ tales que $t \le u$. Como $t, u \in [a,b]$ y $a, b > 0$ (por hipótesis), ambos números t y u son positivos, y como $t \le u$, se deduce[1] que $1/t \ge 1/u$, es decir: $f(t) \ge f(u)$. Por lo tanto, la función $f(t) = 1/t$ es monótona decreciente —y luego integrable— en $[a,b]$.

[1] Recordemos que la implicación $t \le u \Rightarrow \frac{1}{t} \ge \frac{1}{u}$ se cumple sólo cuando $t, u \ne 0$ y tienen el mismo signo.

Ahora, se recuerda que la función logaritmo está definida por

$$\log x \ = \ \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad\qquad \text{(para todo } x > 0\text{)}$$

y se puede usar (sin demostración) que $\log(xy) = \log x + \log y$ para todos $x, y > 0$.

3. Sea un número $x > 0$ fijado. Demostrar por inducción completa que $\log(x^n) = n\, \log x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Se recuerda que las potencias de un número $x > 0$ están definidas por $x^0 = 1$ y $x^{n+1} = x^n \times x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, demostremos que $\log(x^n) = n \log x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Caso de base ($n = 0$). Tenemos que $x^0 = 1$ (por definición), de tal modo que $\log(x^0) = \log 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$ (por definición).
- Paso inductivo. Supongamos que la igualdad $\log(x^n) = n \log x$ (HI) se cumpla para algún entero $n \in \mathbb{N}$. Usando el paso inductivo de la definición de la potencia ($x^{n+1} = x^n \times x$) así como la propiedad fundamental del logaritmo, se deduce que

$$\log\bigl(x^{n+1}\bigr) \ = \ \log(x^n \times x) \ = \ \log(x^n) + \log(x) \underset{\text{(HI)}}{=} n \log x + \log x \ = \ (n+1) \log x \ \ \text{(TI)}$$