**Cálculo diferencial e integral en una variable**
**Solución examen de febrero.**

19 de febrero de 2022.

# Ejercicio Verdadero/ Falso

**Afirmación 1:** La afirmación es verdadera. Recordamos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \arctan(x) = +\infty$.

**Afirmación 2:** La afirmación es verdadera. Usaremos L'Hopital para resolver el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan(x)}{x^2} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(x^2+1)2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(x^2+1)2} = 0.$$

**Afirmación 3:** La afirmación es falsa. La función $f$ es derivable. Calculemos $f^{'}$:

$$f^{'}(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Por lo tanto $f^{'}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, lo que implica que la función es estrictamente creciente y esto hace que no tenga um mínimo en $x = 0$.

**Afirmación 4:** La afirmación es verdadera. En la afirmación 3 vimos que $f$ es creciente, por lo tanto $f$ es inyectiva.

**Afirmación 5:** La afirmación es verdadera. Sabemos que

$$g^{'}(f(1)) = \frac{1}{f'(1)}.$$

En la afirmación 3 vimos que $f^{'}(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Por lo tanto $f^{'}(1) = \frac{1}{2}$. Lo que implica que $g^{'}(f(1)) = \frac{1}{f^{'}(1)} = 2$.

**Afirmación 6:** La afirmación es falsa. Como $f$ es creciente y $f(0) = 0$, esto implica que $f(x) < 0$ para todo $x < 0$. Por lo tanto $\int_{-5}^{-4} f(x)dx$ es negativo.

Otra forma de verificarlo es $|\arctan(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ por tanto $f(x) \leq -4 + \frac{\pi}{2} < 0$ para todo $x \in [-5, -4]$

**Afirmación 7:** La afirmación es verdadera. Recordamos que

$$T_3(f, 0) = f(0) + f^{'}(0)x + f^{''}(0)\frac{x^2}{2!} + f^{'''}(0)\frac{x^3}{3!}.$$

$f(0) = 0$. Como $f^{'}(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, entonces $f^{'}(0) = 0$. Haciendo cuentas queda que $f^{''}(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, entonces $f^{''}(0) = 0$. Por último $f^{'''}(x) = \frac{2(x^2+1)^2-4x(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$, lo que implica que $f^{'''}(0) = 2$. Por lo tanto

$$T_3(f, 0) = \frac{2x^3}{3!}.$$

# Ejercicios múltiple opción.

### Ejercicio 1.

Recordemos que si $f$ es integrable (sea continua o no) se tiene que la función $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ es una función continua. Esta observación, descarta las opciones (A),(C), (F) y (G).
Como $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$, esto descarta la opción (D). Para valores cercanos a $x = 0$, se tiene que $f$ es negativa, por lo tanto (para valores cercanos a cero) se tiene que $F$ es negativa. Esto descarta la opción (E). Por lo tanto, la opción verdadera es la opción (B).

### Ejercicio 2.

Sea $x$ el largo de la base del rectángulo e $y$ su la altura. Si $r$ es el radio de la base del cilindro, se tiene que $x = 2\pi r$. Como el área del cilindro es $A = r^2\pi y$. Se tiene que

$$A = r^2\pi y = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \pi y = \frac{x^2}{4\pi} y.$$

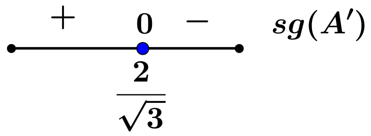
Como el rectángulo está incripto en un círculo de radio 1, por Pitágras, se tiene que $x^2 + y^2 = 4$ (ya que $x^2 + y^2$ es el diametro al cuadrado). De donde $x^2 = 4 - y^2$. Por lo tanto la función $A$ queda de la forma

$$A(y) = \frac{(4 - y^2)y}{4\pi}.$$

Observar que la función $A$ tiene sentido en el dominio $[0, 2]$ (y es una distancia y por tanto no negativa, a su vez, para que x sea no negativa y tiene que ser menor igual a 2).
Observar que $A(0) = A(2) = 0$ por tanto el máximo de la función $A$ se da en $(0, 2)$, y para calcularlo estudiamos el signo de $A'$.
Derivando, tenemos que

$$A^{'}(y) = \frac{-2y^2 + 4 - y^2}{4\pi} = \frac{4 - 3y^2}{4\pi}.$$

Estudiando el signo de $A$,




concluimos que $A$ tiene un máximo en $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ cuyo valor es

$$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{(4 - (\frac{2}{\sqrt{3}})^2)\frac{2}{\sqrt{3}}}{4\pi} = \frac{4}{\pi 3\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto, la opción correcta es la $(C)$.

# Ejercicios desarrollo.

### Ejercicio 1, parte a).

Apliquemos la fórmula de partes: $fg - \int fg^{'} = \int f^{'}g$.
Tomando $f^{'} = 1$, entonces $f = x$ y tomando $g = \log(x)$ se tiene que $g^{'} = \frac{1}{x}\cdot$ Luego,

$$\int_1^e \log(x)dx = x\log(x)|_1^e - \int_1^e \frac{xdx}{x} = x\log(x)|_1^e - x|_1^e$$

Como $x\log(x)|_1^e - x|_1^e = e\log(e) - 1\log(1) - e + 1 = e - e + 1 = 1$. Entonces $\int_1^e \log(x)dx = 1$.

### Ejercicio 1, parte b).

Primero, multiplicamos y dividimos por $e^x$ a la expresión $\frac{e^x-1}{e^x+1}$. Por lo tanto tenemos que

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\frac{e^x}{e^x} = \frac{(e^x + 1)e^x}{e^{2x} + e^x}\cdot$$

Entonces, tenemos que $\int_0^1 \frac{(e^x-1)dx}{e^x+1} = \int_0^1 \frac{(e^x-1)e^x dx}{e^{2x}+e^x}\cdot$ Haciendo el cambio de variable $u = e^x$ se tiene que $du = e^x dx$. Por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{(e^x - 1)e^x dx}{e^{2x} + e^x} = \int_1^e \frac{(u-1)du}{u^2 + u}\cdot$$

Haciendo fracciones simples se llega a que $\frac{u-1}{u^2+u} = \frac{-1}{u} + \frac{2}{u+1}\cdot$ Por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{(e^x - 1)dx}{e^x + 1} = \int_1^e \frac{(u-1)du}{u^2 + u} = \int_1^e \frac{-1du}{u} + \int_1^e \frac{2du}{u+1} = -\log(u)|_1^e + 2\log(u+1)|_1^e =$$

$$-1 + 2\log(e+1) - 2\log(2)\cdot$$

## Ejercicio 2

### Parte b

Supongamos por absurdo que existen $a', b' \in [a, b]$ tal que $a' < b'$ y $f(a') \neq f(b')$. Aplicando el teorema de valor medio tenemos que existe $c \in (a', b') \subset (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} \neq 0$$

lo cual es absurdo.

### Parte c

Aplicando la parte b a la función $h = f - g$ tenemos que $h(x) = k$ cte, es decir $f(x) - g(x) = k$, luego $f(x) = g(x) + k$.

**Parte d) (a).**

Si $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2+1}$, entonces por el Teorema fundamental del cálculo se tiene que $f^{'}(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Si $g(x) = \int_{\frac{1}{x}}^0 \frac{dt}{t^2+1}$, entonces

$$g^{'}(x) = -\left(\frac{-1}{x^2}\right)\frac{1}{(\frac{1}{x})^2+1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Por lo tanto, se tiene que $f^{'}(x) = g^{'}(x)$.

**Parte d) (b).**

Observar $f(1) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}$ es mayor que cero y que $g(1) = \int_1^0 \frac{dt}{t^2+1} = -\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}$ es menor que cero. Por lo tanto $f(1) \neq g(1)$.