Cálculo diferencial e integral en una variable

2do semestre de 2017

Resolución del examen de diciembre de 2017

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 30 puntos)

Ejercicio 1 Sea un conjunto A tal que $\mathbb{N} \subset A \subset [0, +\infty)$ ...

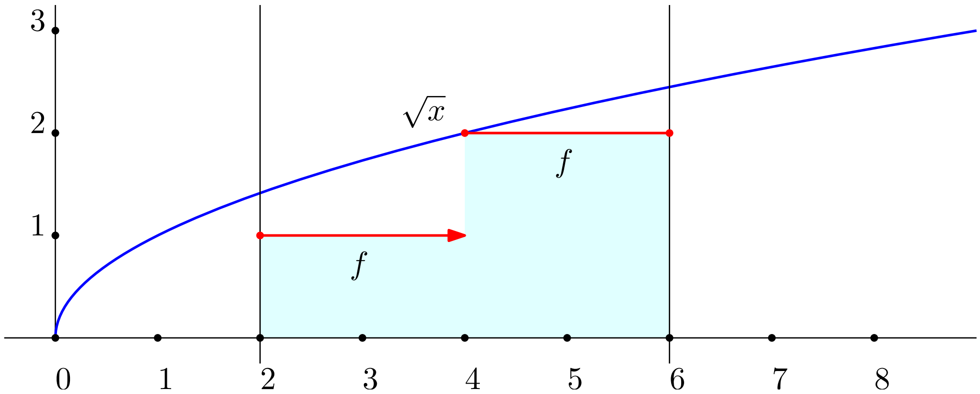
Solución: Como $A \subset [0, +\infty)$, 0 es una cota inferior de A. Y como $\mathbb{N} \subset A$, tenemos que $0 \in A$. Luego 0 es el mínimo de A. Por otro lado, como $\mathbb{N} \subset A$, el conjunto A no está acotado superiormente, entonces A no tiene supremo.

Por lo tanto, la opción correcta era $\boxed{A \text{ tiene mínimo, pero no tiene supremo}}$

Ejercicio 2 Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual a x. La integral $\int_2^6 f(x)\,dx$ vale ...

Solución: Como la función $x \mapsto \sqrt{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$, se observa que:

- para todo $x \in [2, 4)$, tenemos que $1 < \sqrt{2} \leq \sqrt{x} < \sqrt{4} = 2$, entonces $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1$;
- para todo $x \in [4, 6]$, tenemos que $2 = \sqrt{4} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{6} < 3$, entonces $f(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$.



Por lo tanto, la función f es escalonada en el intervalo $[2, 6]$, y su integral vale

$$\int_2^6 f(x)\,dx = \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx = \int_2^4 1\,dx + \int_4^6 2\,dx = 2 + 4 = 6\,.$$

Entonces, la opción correcta era $\boxed{6}$

Ejercicio 3 La igualdad $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\log(\operatorname{sen}(x) + 1) - (ax + bx^2 + cx^3)}{x^3} \right) = 0$

se cumple para los siguientes valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ ...

Solución: Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) \;=\; \log(\operatorname{sen}(x)+1) - (ax + bx^2 + cx^3) \qquad \text{y} \qquad g(x) \;=\; x^3$$

Ambas funciones son infinitamente derivables en $\mathbb{R}$, y sus primeras tres derivadas son

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)+1} - (a + 2bx + 3cx^2) & \qquad g'(x) &= 3x^2 \\ f''(x) &= -\frac{1}{\operatorname{sen}(x)+1} - (2b + 6cx) & \qquad g''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= \frac{\cos(x)}{(\operatorname{sen}(x)+1)^2} - 6c & \qquad g'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

Queremos determinar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \;=\; 0.$

Estudio del límite de f/g en 0 Tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ ("0/0")

Por la regla de l'Hôpital, tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (cuando éste existe).

Por lo tanto, tenemos que determinar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; 0.$

Estudio del límite de f'/g' en 0 Tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1 - a$ y $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0.$

Si tuvieramos que $a - 1 \neq 0$, tendríamos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$: absurdo.

Entonces tenemos que $a - 1 = 0$, es decir: $a = 1$. En este caso, el límite de f'/g' en 0 nos lleva de nuevo a una indeterminación de tipo "0/0". Por la regla de l'Hôpital, tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \;=\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ (cuando éste existe).

Por lo tanto, tenemos que determinar los valores de $b, c \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} \;=\; 0.$

Estudio del límite de f''/g'' en 0 Tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} f''(x) = -1 - 2b$ y $\lim\limits_{x\to 0} g''(x) = 0.$

Si tuvieramos que $-1 - 2b \neq 0$, tendríamos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \pm\infty$: absurdo.

Entonces, tenemos que $-1 - 2b = 0$, es decir: $b = -\frac{1}{2}$. En este caso, el límite de f''/g'' en 0 nos lleva de nuevo a una indeterminación de tipo "0/0". Por la regla de l'Hôpital, tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} \;=\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'''(x)}{g'''(x)}$ (cuando éste existe).

Por lo tanto, tenemos que determinar los valores de $c \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'''(x)}{g'''(x)} \;=\; 0.$

Estudio del límite de f'''/g''' en 0 Ahora, se observa que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'''(x)}{g'''(x)} = \dfrac{1-6c}{6}.$

Para que este límite sea nulo, se necesita tomar $c = \frac{1}{6}$.

Por lo tanto, la opción correcta era $\boxed{a = 1,\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{6}}$

Ejercicio 4 Sea $f : [0,2] \to [0,2]$ una función continua tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 2$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

I. La función f es sobreyectiva.
II. La función f es inyectiva.
III. Necesariamente existe al menos un punto $x \in (0,2)$ tal que $f(x) = x$.

Indique la opción correcta: ...

Solución: Como $f(0) = 0$ y $f(1) = 2$, sabemos por el teorema de Bolzano (o teorema de los valores intermedios) que para todo número $y \in [0,2]$, existe un punto $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = y$. Entonces la función f es sobreyectiva: la afirmación I es verdadera. En particular, tomando $y = f(2)$ ($\in [0,2]$), sabemos que existe un punto $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = f(2)$. Pero como $x \neq 2$ (pues $x \in [0,1]$), se deduce que f no es inyectiva: la afirmación II es falsa. Ahora, consideremos la tercera afirmación. Se observa que para algunas funciones que cumplen los datos del problema, existe un punto $x \in (0,2)$ tal que $f(x) = x$ (véase Fig. 1 & 2), mientras para otras, no existe ningún punto $x \in (0,2)$ tal que $f(x) = x$ (véase Fig 3):

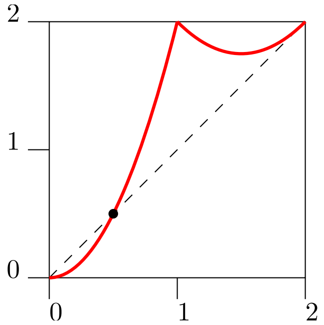


Fig. 1

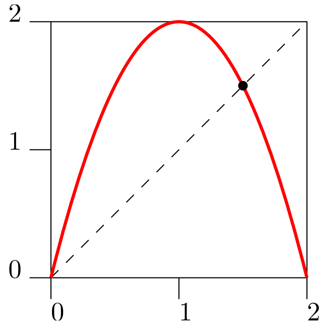


Fig. 2

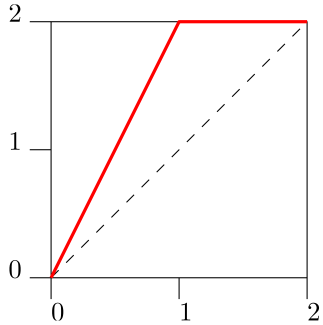


Fig. 3

Así, no existe necesariamente un punto $x \in (0,2)$ tal que $f(x) = x$: la afirmación III es falsa.

Por lo tanto, la opción correcta era $\boxed{\text{I es verdadera, II y III son falsas}}$

Ejercicio 5 El valor de la integral $\displaystyle\int_1^e \frac{4\log(x)+3}{x(2\log(x)+1)}dx$ es:

Solución: Tenemos que

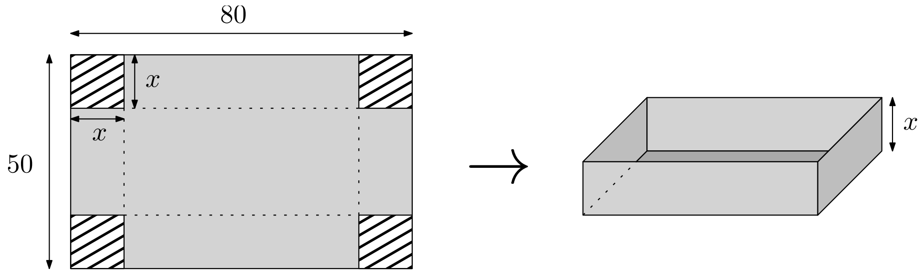
$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{4\log(x)+3}{x(2\log(x)+1)}dx &= \int_0^1 \frac{4t+3}{2t+1}\,dt && \left(\begin{array}{l}\text{cambio de variable:}\\ t=\log(x),\ dt = dx/x\end{array}\right)\\
&= \int_0^1 \left(\frac{(4t+2)+1}{2t+1}\right)dt = \int_0^1 \left(2 + \frac{1}{2t+1}\right)dt && \text{(fracciones simples)}\\
&= 2 + \left[\tfrac{1}{2}\log(2t+1)\right]_{t=0}^{t=1} = 2 + \frac{1}{2}\log 3
\end{aligned}$$

Entonces, la opción correcta era $\boxed{2 + \frac{1}{2}\log 3}$

Ejercicios de desarrollo (Total: 70 puntos)

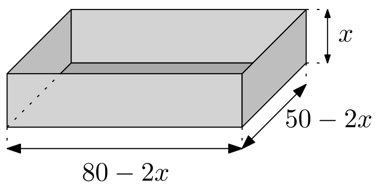
Primer ejercicio de desarrollo (15 puntos)

Se desea construir una caja abierta a partir de un rectángulo de cartón de 80 cm × 50 cm, quitando cuadrados iguales de lado x en cada esquina como lo indicado en la siguiente figura:



Determinar el valor de x que maximiza el volumen de la caja obtenida. Se deben justificar todas las etapas del razonamiento que permite llegar al resultado.

Solución: Las tres dimensiones de la caja obtenida son $80 - 2x$ y $50 - 2x$ y x:



Además, se observa que $\quad 80 - 2x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq 40 \quad$ y $\quad 50 - 2x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq 25.$

Así, en lo siguiente, se supone que $x \in [0, 25]$, lo que nos asegura que las tres dimensiones de la caja son positivas o nulas. El volumen $V(x)$ se expresa en función de x por:

$$V(x) \;=\; (80 - 2x)(50 - 2x)x \;=\; 4x^3 - 260x^2 + 4000x\,.$$

Para maximizar el volumen $V(x)$, se observa que la función (polinomial) V es derivable en $\mathbb{R}$, y que su derivada es dada por:

$$V'(x) \;=\; 12x^2 - 520x + 4000 \;=\; 4(3x^2 - 130x + 1000) \;=\; 12\big(x - 10\big)\big(x - \tfrac{100}{3}\big)\,.$$

La función V' tiene dos raíces $x_1 = 10$ ($\in [0, 25]$) y $x_2 = \frac{100}{3} \approx 33,33$ ($\notin [0, 25]$). Luego, en el intervalo $[0, 25]$, se observa que

- $V'(x) = 0$ si y sólo si $x = 10$,
- $V'(x) > 0$ para todo $x \in [0, 10)$ y
- $V'(x) < 0$ para todo $x \in (10, 25]$.

Entonces, la función V es estrictamente creciente en el intervalo $[0, 10]$, estrictamente decreciente en el intervalo $[10, 25]$, y alcanza su máximo absoluto en el punto $x = 10$.

x	0		10		25
$V'(x)$	+	+	0	−	−
$V(x)$	$V(0)$	↗	$V(10)$	↘	$V(25)$

Por lo tanto, el valor de x que maximiza el volumen de la caja es $x = x_1 = 10$ cm.
(Las otras dos dimensiones son 30 cm y 60 cm, y el volumen es 18000 cm^3 = 18 litros.)

Segundo ejercicio de desarrollo (30 puntos)

1. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Completar la definición:
   f es continua en un punto $x_0 \in I$ si y sólo si ...

Sea un número $k > 0$. Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es k-lipschitziana cuando para todos $x, x' \in I$, tenemos que $|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$.

2. Demostrar que si $f : I \to \mathbb{R}$ es k-lipschitziana, entonces f es continua en I.
3. Demostrar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es k-lipschitziana para algún $k > 0$.

Solución: 1. La función f es continua en un punto $x_0 \in I$ si y sólo si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, es decir: si y sólo si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Se fija un punto $x_0 \in I$ cualquiera. Como f es k-lipschitziana, tenemos que

$$(0 \ \leq)\ \ |f(x) - f(x_0)| \ \leq\ k|x - x_0| \qquad \text{(para todo } x \in I)$$

Y como $\lim_{x \to x_0} k|x - x_0| = 0$, se deduce (teorema del sándwich) que $\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, lo que implica que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Por lo tanto, f es continua en (todo punto de) I.

3. Como f es continua en el intervalo (cerrado) $[a, b]$, está acotada en dicho intervalo, y existe un número $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in [a, b]$. Ahora, se observa que para todos $x, x' \in [a, b]$, tenemos que

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x')| \ &= \ \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x'} f(t)\,dt \right| \ = \ \left| \int_{x'}^x f(t)\,dt \right| \\ &\leq \ \int_{\text{mín}(x,x')}^{\text{máx}(x,x')} |f(t)|\,dt \ \leq \ \int_{\text{mín}(x,x')}^{\text{máx}(x,x')} k\,dt \ = \ k|x - x'| \end{aligned}$$

Esto demuestra que la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es k-lipschitziana.

Tercer ejercicio de desarrollo (25 puntos)

Se recuerda que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

1. Demostrar el teorema de integración por partes:
   Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos funciones derivables y con derivadas f' y g' continuas, entonces:
   $$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx \ = \ f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \qquad \text{(para todos } a, b \in \mathbb{R})$$
2. Sea $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Demostrar que $I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Sea $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Se recuerda que $0! = 1! = 1$.)
   Demostrar por inducción completa que $I_n = (-1)^n n!(es_n - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución: 1. Sea $h(x) = f(x)g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $\mathbb{R}$, y su derivada es $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Además, como f' y g' son continuas, las tres funciones $f'g$, fg' y $h = f'g + fg'$ son continuas en $\mathbb{R}$; entonces son integrables en cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y tenemos que:

$$\int_a^b h'(x)\,dx \;=\; \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Por otro lado, tenemos que $\int_a^b h'(x)\,dx = \big[h(x)\big]_{x=0}^{x=1} = h(b) - h(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ por la regla de Barrow, pues h es una primitiva de h'. Por lo tanto, se deduce que:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx \;=\; \int_a^b h'(x)\,dx - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \;=\; f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por integración por partes, tenemos que

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{f'(x)}\,dx \;=\; \Big[x^{n+1}e^x\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 (n+1)x^n e^x\,dx \\ &= (e-0) - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\,dx \;=\; e - (n+1)I_n\,. \end{aligned}$$

3. Se observa que $s_0 = 0$ y $s_{n+1} = s_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Ahora, demostremos por inducción completa que $I_n = (-1)^n n!(es_n - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Caso de base. Calculemos los dos lados de la igualdad deseada:

  $$I_0 = \int_0^1 x^0 e^x\,dx = \big[e^x\big]_{x=0}^{x=1} = e - 1 \qquad \text{y} \qquad (-1)^0 0!(es_0 - 1) \;=\; (e\cdot 1 - 1) = e - 1\,.$$

  Entonces, tenemos que $I_0 = (-1)^0 0!(es_0 - 1)$.
- Paso inductivo. Supongamos que $I_n = (-1)^n n!(es_n - 1)$ (HI) para algún $n \in \mathbb{N}$.
  Tenemos que

  $$\begin{aligned} I_{n+1} &= e - (n+1)I_n && \text{(por 2.)} \\ &= e - (n+1)(-1)^n n!(es_n - 1) && \text{(por HI)} \\ &= e - (-1)^n(n+1)!(es_n - 1) && \big((n+1)n! = (n+1)!\big) \\ &= e + (-1)^{n+1}(n+1)!(es_n - 1) && \big(-(-1)^n = (-1)^{n+1}\big) \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)!\left(\frac{e}{(-1)^{n+1}(n+1)!} + (es_n - 1)\right) \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)!\left(e\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + (es_n - 1)\right) && \left(\frac{1}{(-1)^{n+1}} = (-1)^{n+1}\right) \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)!\left(e\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + s_n\right) - 1\right) \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)!\big(es_{n+1} - 1\big) && \left(s_{n+1} = s_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right) \end{aligned}$$

  Esto demuestra que $I_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)!(es_{n+1} - 1)$ (TI).
  Por lo tanto, tenemos que $I_n = (-1)^n n!(es_n - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.