Soluciones a ejercicios seleccionados del práctico 4

1. Ejercicio 1.1

Calcular la integral de las siguientes funciones en el intervalo [0,2].

i) $f(x) = \lfloor 3x \rfloor$

El gráfico de la función en cuestión estará compuesto por seis rectágulos cuyas bases miden $\frac{1}{3}$ y sus alturas se corresponden con los primeros seis números naturales (ver figura 1). Esto se debe a que si $0 \leq x < \frac{1}{3}$ entonces $0 \leq 3x < 1$ y por tal $f(x) = 0$, si $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ entonces $1 \leq 3x < 2$ y por tal $f(x) = 1$, si $\frac{2}{3} \leq x < 1$ entonces $f(x) = 2$, y así sucesivamente, avanzando en intervalos de medida $\frac{1}{3}$. Hallar la integral es entonces sumar las áreas de estos rectángulos:

$$\int_0^2 f(x)dx = \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{3}i = \frac{0}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 5$$

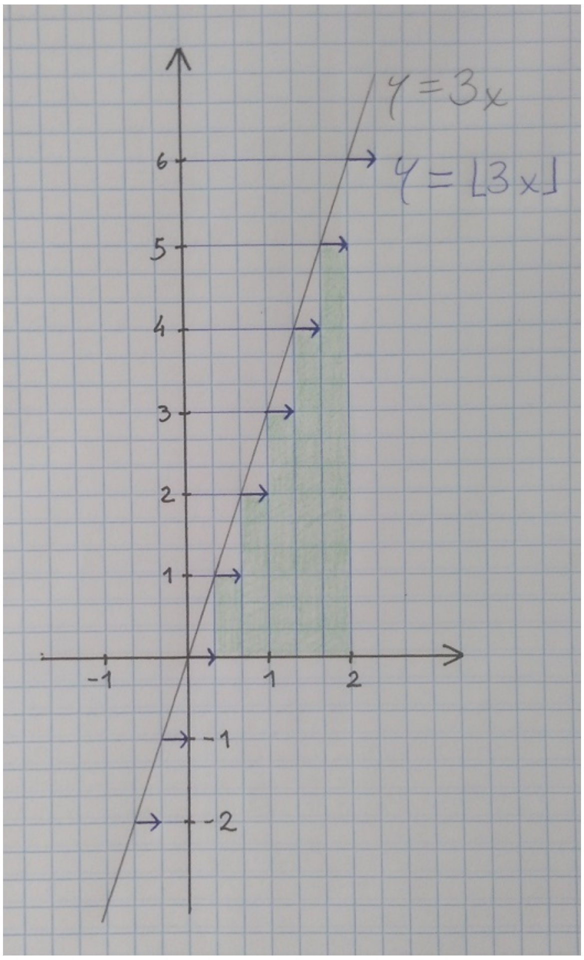

Figura 1: Gráfico de las funciones $3x$ (gris) y $\lfloor 3x \rfloor$ (azul), y el área bajo el gráfico de esta última en el intervalo [0,2] (verde).

k) $f(x) = \lfloor 2\sin(x) \rfloor$

Mirando el gráfico de la función $\sin(x)$ (ver figura 2) notamos que es monótona creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y monótona decreciente en $[\frac{\pi}{2}, 2]$. También nótese que $\sin(\frac{\pi}{6}) = 1/2$. Entonces:

- Si $0 \leq x < \frac{\pi}{6} \implies 0 \leq 2\sin(x) < 1$ y de ahí $f(x) = 0$.
- Si $\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \implies 1 \leq 2\sin(x) < 2$ y por tal $f(x) = 1$.
- Si $x = \frac{\pi}{2}$ entonces $f(x) = \lfloor 2\sin(\frac{\pi}{2}) \rfloor = \lfloor 2 \cdot 1 \rfloor = 2$.
- Finalmente, si $\frac{\pi}{2} < x \leq 2 \implies 1 < 2\sin(2) \leq x < 2$ y de ahí $f(x) = 1$. (Nótese que $2\sin(2) \approx 1,819$.)

La primera y la tercera región no aportan área bajo el gráfico (por tener altura y base de medida nula, respectivamente) así pues la integral queda definida por las áreas signadas de solamente dos rectángulos:

$$\int_0^2 f(x)dx = 1(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) + 1(2 - \frac{\pi}{2}) = 2 - \frac{\pi}{6}$$

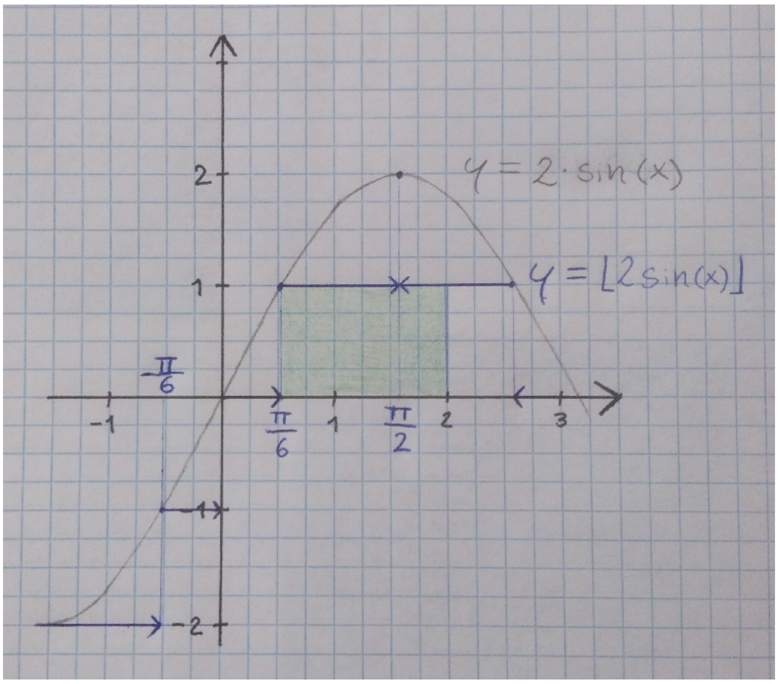

Figura 2: Gráfico de las funciones $2\sin(x)$ (gris) y $\lfloor 2\sin(x) \rfloor$ (azul), y el área bajo el gráfico de esta última en el intervalo [0,2] (verde).

2. Ejercicio 1.8

Calcular las siguientes integrales

d) $\int_1^9 \lfloor\sqrt{x}\rfloor dx$

El intervalo [1,9) puede dividirse en dos: [1,4) y [4,9). Si x encuentra en el primero entonces $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = 1$, mientras que si x está en el segundo entonces $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = 2$. El área bajo el gráfico en el intervalo considerado viene pues determinada por dos rectángulos (ver figura 3) y la integral se determina rápidamente:

$$\int_1^9 \lfloor\sqrt{x}\rfloor dx = 1(4-1) + 2(9-4) = 13$$

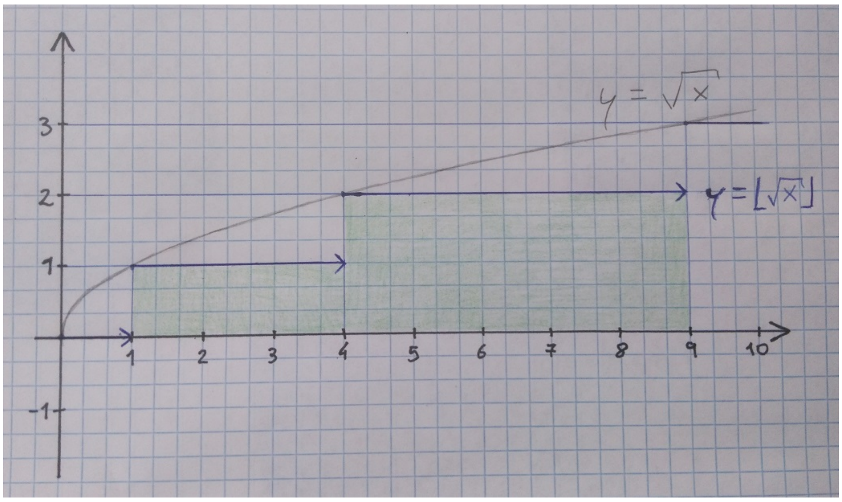

Figura 3: Gráfico de las funciones $\sqrt{x}$ (gris) y $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ (azul), y el área bajo el gráfico de esta última en el intervalo [1,9] (verde).

f) $\int_1^{100} \lfloor\frac{1}{x}\rfloor dx$

$\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$ es nulo para casi todo punto del intervalo. En efecto, si $x > 1$ entonces $0 < \frac{1}{x} < 1$. La función vale 1 en un sólo punto del intervalo ($x = 1$). Entonces el área bajo el gráfico es nula y $\int_1^{100} \lfloor\frac{1}{x}\rfloor dx = 0$