CDIV – Práctico 3 – Ej 7

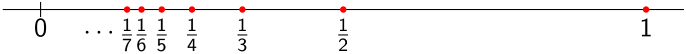
Bernardo Marenco

Marzo 2020

Ejercicio 1

Partes a) - Probar que A está acotado inferiormente y b) Notemos α al ínfimo de A. Verificar que $\alpha \geq 0$.

- Vamos a trabajar con el conjunto $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$



- Como $\frac{1}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, 0 es cota inferior de A.
- Como A es un conjunto no vacío y acotado inferiormente, por el ej 6a), A tiene ínfimo.
- Llamamos $\alpha = \text{ínf}(A)$.
- Ya probamos que 0 es cota inferior. Como el ínfimo tiene que ser mayor o igual que cualquier cota inferior, concluimos $\alpha \geq 0$.

Ejercicio 1

Parte c) - Verificar que si β es una cota inferior entonces 2β también lo es.

- Si β es cota inferior de A, entonces se cumple $\beta \leq \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Multiplicamos por 2 la desigualdad: $2\beta \leq \dfrac{2}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- En particular, <u>para los n pares</u> esto implica que: $2\beta \leq 1,\ 2\beta \leq \dfrac{1}{2}, 2\beta \leq \dfrac{1}{3}$, etc.
- Es decir: $2\beta \leq \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2\beta$ es cota inferior de A.

Ejercicio 1

Parte d) - Deducir que $\alpha = 0$. Deducir que para todo $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x > \frac{1}{n}$.

- Supongamos que $\alpha = \inf(A) > 0$ (ya habíamos probado que $\alpha \geq 0$).
- Como el ínfimo es cota inferior, por la parte c) 2α también es cota inferior.
- Como $\alpha > 0 \Rightarrow 2\alpha > \alpha$.
- Encontramos una cota inferior mayor al ínfimo, lo que es absurdo.
- Falta ver que para todo $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x > \frac{1}{n}$. Supongamos que eso es falso.
- Es decir, suponemos que para un $x > 0$ se cumple $x \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Entonces, x es cota inferior de A.
- Pero $x > 0$, por lo que tendríamos una cota inferior mayor al ínfimo.