Capítulo 1

Conceptos elementales del lenguaje algebraico

1.1. Conjuntos, elementos y pertenencia

En matemática se utilizan diferentes lenguajes para comunicarse, existen tres grandes categorías:
El lenguaje coloquial, el lenguaje simbólico y el lenguaje gráfico. El lenguaje coloquial se utiliza para expresar ideas y conceptos en forma escrita u oral usando el lenguaje ordinario. El lenguaje simbólico se utiliza para expresar con símbolos en forma precisa los conceptos dados en lenguaje coloquial. El lenguaje gráfico se utiliza para aclarar conceptos y situaciones. Al usar el lenguaje simbólico, usualmente utilizamos letras mayúsculas (A, B, $C, \ldots$) para designar los conjuntos y letras minúsculas (a, b, $c, \ldots$) para designar los elementos. Se considera un símbolo que relaciona un elemento con un conjunto ($\in$). Se escribe

$$a \in A$$

y se lee, *a pertenece al conjunto A*. Para indicar que un elemento no pertenece a un conjunto se escribe

$$a \notin A$$

Los símbolos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ denotan determinados conjuntos numéricos. $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.
No ahondaremos aquí en la construcción de estos conjuntos numéricos y los supondremos conocidos.

Una de las primeras interrogantes que aparecen al trabajar con conjuntos es la forma de determinarlos. Se debe indicar de una forma precisa y sin ambigüedades, cuáles son sus elementos. Se pueden distinguir varias formas, una de estas es determinar al conjunto por *extensión*, esto es, listar todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, si A es el conjunto de los números naturales mayores o iguales que 10 y menores que 20, entonces

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

Podemos observar que cada elemento esta separado por una coma, y los mismos se encuentran entre llaves.
Otra forma de describir un conjunto es por *comprensión*, la misma consiste en indicar una propiedad que deben cumplir sus elementos y sólo estos (para no generar ambigüedades). Consideremos B como el conjunto de los números naturales que son pares y menores que nueve, entonces

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n < 9 \text{ y } n = \dot{2}\}$$

Como última observación recordemos que el conjunto que no tiene elementos se denomina *conjunto vacío*, se lo denota usualmente $\{ \}$ o $\varnothing$.

Ejemplo 1.1.1
Determinar los siguientes conjuntos por extensión y por comprensión:

1. A es el conjunto formado por los cuadrados de los primeros diez números naturales.

2. B es el conjunto formado por las raíces cuadradas de los primeros cincuenta naturales y que además sean naturales.

3. C es el conjunto formado por los naturales múltiplos de tres que además son menores que diecisiete o múltiplos de cinco menores que treinta.

Solución:

1. Si deseamos determinar A por extensión, debemos elevar al cuadrado cada uno de los diez primeros números naturales y el elemento obtenido pertenecerá al conjunto. Realicemos los cálculos:
   $0^2 = 0,\ 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16,\ 5^2 = 25,\ 6^2 = 36,\ 7^2 = 49,\ 8^2 = 64,$
   $9^2 = 81,\ 10^2 = 100$. Obtenemos entonces que $A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$.
   Ahora bien, para determinar por comprensión A, debemos indicar que propiedad cumplen sus elementos. $A = \{x : x = n^2,\ n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$

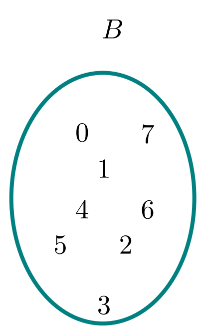
2. Para determinar por extensión este conjunto podríamos probar aplicar raíz cuadrada a cada número entre 0 y 50 y ver si el resultado es un número natural. Luego de algunos cálculos obtenemos que $B = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$.
   Para expresar B por comprensión indicamos las propiedades que se deben cumplir: $B = \{x \in \mathbb{N} : x = \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}, n \leq 50\}$.

3. Al determinar C debemos tener en cuenta las dos condiciones, la primera es ser *múltiplo de tres menor que diecisiete*, la segunda es ser *múltiplo de cinco y menor que treinta*. Entonces $C = \{3, 6, 9, 12, 15, 5, 10, 20, 25\}$. Determinemos C por comprensión:

$$C = \{x : x = 3n,\ n \leq 5, n \in \mathbb{N} \text{ o } x = 5m,\ m \leq 5,\ m \in \mathbb{N}\}$$

   Mas adelante veremos una forma mas sencilla de determinar este conjunto teniendo en cuenta las *operaciones entre conjuntos*.

Observación: Al determinar un conjunto por extensión, el orden en el cual aparecen los elementos no tiene importancia y si los elementos son repetidos, se cuentan una vez sola. A modo de ejemplo si escribimos $T = \{1, 2, 3, 2, 3\}$, en realidad se considera $T = \{1, 2, 3\}$.
Veamos ahora una representación en modo gráfico de los conjuntos, es claro que en ciertos casos manejar diferentes registros ayuda a la comprensión de la situación.
Los conjuntos pueden representarse gráficamente utilizando diagramas de Venn, la idea es bastante simple y conocida,



denota el conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
Veamos algunas relaciones básicas.

Definición 1.1.1
Sean A y B dos conjuntos, se dice que A esta incluido en B o que A es un subconjunto de B y se denota $A \subset B$ si todo elemento que pertenece al conjunto A también pertenece al conjunto B.

En lenguaje simbólico:

$$A \subset B \text{ si } \forall\, x \;/\; x \in A \Rightarrow x \in B$$

La concatenación de símbolos ($\forall\, x \;/\; x \in A$) se leen como "*para todo elemento x perteneciente al conjunto A*"
Decir que dos conjuntos son iguales ($A = B$), es decir que tienen los mismos elementos, por tanto todo elemento de A debe pertenecer a B y asimismo, todo elemento de B debe pertenecer a A. En resumidas cuentas, $A = B$ si $A \subset B$ y $B \subset A$.
En el caso que $A \subset B$ pero $A \neq B$ se dice que A esta incluido estrictamente en B o que A es un subconjunto propio de B y se denota $A \subsetneq B$. En este caso todo elemento del conjunto A pertenece al conjunto B, pero existe al menos un elemento b que pertenece al conjunto B tal que este no pertenece al conjunto A. En símbolos

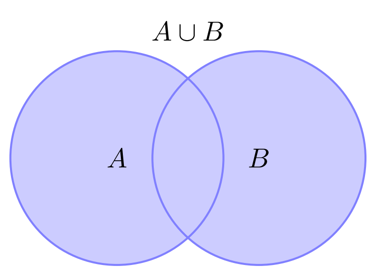
$$A \subsetneq B \textbf{ si } \forall\, a \in A \Rightarrow a \in B \text{ y } \exists\, b \in B \;/\; b \notin A$$

1.1.1. Operaciones con Conjuntos

Unión de Conjuntos
Sean A y B dos conjuntos, la unión de A y B es un nuevo conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B. En símbolos matemáticos este concepto se expresa de la siguiente manera

$$A \cup B = \{x \;/\; x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Y su representación con diagramas de Venn es



Ejemplo 1.1.2
Sean $A = \{1, 5, 7, 14, 22, 31, 33\}$ y $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 20, 22, 30\}$.
Entonces $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 14, 20, 22, 30, 31, 33\}$.

Ejemplo 1.1.3

Consideremos los siguientes conjuntos, $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$. Entonces $A \cup A = \{1,3,5,7,9\} \cup \{1,3,5,7,9\} = A$. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = B \cup A$. $A = \{1,3,5,7,9\} \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = A \cup B$.

-

Proposición 1 (Propiedades de la Unión de Conjuntos)

Sean A y B dos conjuntos. Entonces:

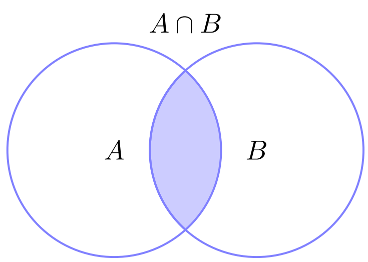
1. $A \cup A = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup \varnothing = A$
4. $A \subset A \cup B$
5. $B \subset A \Leftrightarrow B \cup A = A$.

Intersección de Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos, la intersección de A y B es un nuevo conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B. En símbolos matemáticos

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Y su representación usual con diagramas de Venn es



Ejemplo 1.1.4

Sean $A = \{1,5,7,14,22,31,33\}$ y $B = \{2,4,5,6,7,20,22,30\}$.
Entonces $A \cap B = \{5,7,22\}$.

Ejemplo 1.1.5
Consideremos $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. $A \cap A = A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} \cap A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} = A$. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} \cap \{2, 3, 4, 5, 7, 9\} = \{2, 3, 4\} = B \cap A$. $A \cap B = \{2, 3, 4\} \subset \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

Proposición 2 (Propiedades de la intersección de conjuntos)
Sean A y B conjuntos. Entonces:

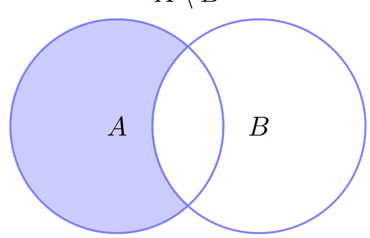
1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap \varnothing = \varnothing$
4. $A \cap B \subset A$
5. $B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$.

Diferencia de Conjuntos
Sean A y B dos conjuntos, se llama diferencia de A y B al conjunto que tiene como elementos los que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B.
Simbólicamente se denota

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Es usual escribir también $A - B$ para notar $A \setminus B$.

$A \setminus B$



Ejercicio 1
Determinar si es cierto que si A y B son dos conjuntos, se cumple que $A \setminus B = B \setminus A$.

Observación: Para determinar si una cierta propiedad es falsa, basta encontrar un caso en que no sea cierta. Esto se conoce como "contraejemplo" y es muy utilizado en matemática. Tener en cuenta esto para el ejercicio anterior.

Proposición 3 (Propiedades de la Diferencia de Conjuntos)
Sean A, B y C conjuntos. Entonces:

1. $A \setminus A = \varnothing$
2. $A \setminus \varnothing = A$
3. $\varnothing \setminus A = \varnothing$.
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Complemento
Si $A \subset B$ se define el complemento de A respecto de B como el conjunto cuyos elementos pertenecen a B y no pertenecen a A. Simbólicamente se anota $A^c_B = \{x : x \in B \text{ y } x \notin A\}$. Observar que el subíndice indica el conjunto respecto del cual se complementa.

Observación: Si no se indica el conjunto respecto al cual se complementa entonces $B^c = \{x : x \notin B\}$ quedando implícito el conjunto universal al cual pertenecen los elementos.

Ejercicio 2

1. De tres conjuntos se sabe que $A \cup C = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n < 9 \text{ y } n \neq 6\}$, $B \cup C = \{2, 5, 7, 8, 9\}$ $B \cap C = \{5, 7\}$, $A \cap C = \{2\}$ y $C \setminus (B \cup A) = \{8\}$.
   Hallar A, B y C.

2. Dados $B = \{x \in \mathbb{N} \ / \ 2 \text{ divide } x \text{ y } 3 < x < 9\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 9\}$.
   Hallar todos los conjuntos D que verifican simultáneamente $D \subset C$, $\{6, 7\} \subset D$ y $B \cap D = \{6, 8\}$.

3. Considerar los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando la respuesta

a) $A = B$

b) $A \subset B$

c) $A \subset C$

d) $A \in C$

e) $A \subset D$

f) $B \subset C$

g) $B \subset D$

h) $B \in D$

i) $A \in D$

4. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x \leq 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x \leq 4\}$.
   Hallar los conjuntos C tales que $A \subset C \subset B$.

5. Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 8\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 6\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 4\}$.
   Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta.

   a) $3 \notin C$

   b) Si $x \in A \Rightarrow x \leq 5$

   c) Si $x \leq 8 \Rightarrow x \in B$

   d) Si $x \in B \Rightarrow x \geq 2$

   e) $C \subset D$

   f) $D \subset A$

   g) $A \cap B = C$

   h) $B \cap C = B$

6. Se le realizó a un grupo de 43 estudiantes un cuestionario que contenía las siguientes preguntas:
   ¿repite?, ¿tiene previas?, ¿posee todos los textos recomendados? Se obtuvieron los siguientes datos:

   a) 12 estudiantes repiten

   b) 15 estudiantes poseen todos los textos

   c) 6 estudiantes repiten y tienen los textos

   d) 17 respondieron negativamente a las tres preguntas

   e) 1 estudiante respondió afirmativamente a las tres preguntas

   f) 10 respondieron afirmativamente a solo dos preguntas

   g) 15 estudiantes respondieron afirmativamente solo a una pregunta

   (i) De los estudiantes que no repiten ni tienen todos los textos, ¿cuántos tienen previas?

   (ii) De todo el grupo, ¿cuántos tienen previas?

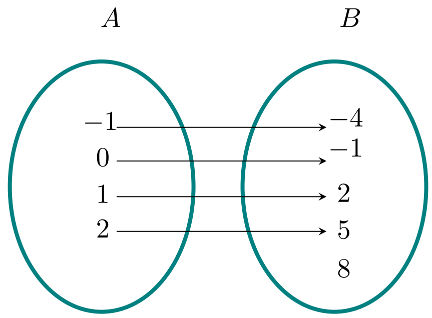
Capítulo 2

Conceptos elementales de funciones

Si A y B son dos conjuntos, una función de A en B, escrita $f : A \to B$ asocia a cada elemento $x \in A$ un único elemento, denotado $f(x) \in B$. El elemento $f(x)$ se llama imagen de x por f y x se llama preimgen de $f(x)$.
Si $f : A \to B$, entonces A se dice que es el dominio de f, B se dice que es el codominio de f y el conjunto $\{f(x) : x \in A\}$ cuyos elementos son las imágenes por f de todos los elementos de A se llama conjunto imagen; usualmente denotado $\mathrm{Im}(f)$. Es también usual que la forma de asociar elementos del dominio con elementos del codominio se haga mediante fórmulas. La misma recibe el nombre de regla de asignación.
Observar que para que dos funciones sean iguales no basta con que las reglas de asignación sean iguales, sino que tanto el dominio como el codominio deben serlo. Si $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$ son tal que $f = g$, entonces $A = A', B = B'$ y $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.
Recíprocamente, si $A = A'$, $B = B'$ y $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in A$, entonces $f = g$.

Ejemplo 2.0.13
Sea $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-4, -1, 2, 5, 8\}$ dos conjuntos, en donde los elementos de A están relacionados con los elementos de B, mediante la fórmula $y = 3x - 1$, con $x \in A$ e $y \in B$. Una representación gráfica se muestra en la Figura 2.0.13.

Ejemplo 2.0.14
Tomemos $A = [-10, 10]$ y $B = \mathbb{R}$. Sea $f : A \to B$ la función que asigna a cada elemento $x \in A$ el elemento $x^2 + 1 \in B$, esto es tal que su regla de asignación es$f(x) = x^2 + 1$.



Hallemos $\mathrm{Im}(f)$:
Observar que como $x^2 \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, en particular esto se cumple en $A = [-10, 10]$. Entonces $x^2 + 1 \geq 1$ y si tomamos $x = 0$ se tiene $f(0) = 1$. Por otro lado, el valor máximo que puede tomar $f(x)$ es $f(10) = f(-10) = 101$.
Hasta ahora tenemos que $\mathrm{Im}(f) \subset [1, 101]$, se nos plantea el problema de determinar si la inclusión es estricta o se cumple la igualdad. Si la igualdad fuera estricta, existe al menos un elemento del intervalo $[1, 101]$ que no tiene preimagen. Veamos que sucede:
Sea $y \in [1, 101]$, $y \in \mathrm{Im}(f)$ si $\exists\, x \in [-10, 10]$ tal que $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$, ahora bien, $1 \leq y \leq 101 \Leftrightarrow 0 \leq y - 1 \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{y-1} \leq 10$. Por tanto y tiene al menos una preimagen, el número $\sqrt{y-1} \in [-10, 10]$ concluyendo que $\mathrm{Im}(f) = [1, 101]$.

Queda como ejercicio determinar $f(S)$ y $f^{-1}(R)$ siendo $S = [2, 5]$ y $R = [82, 101]$

Ejemplo 2.0.15
Consideremos las funciones:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = x^2$,
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = \frac{(2x)^2}{4}$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ / $h(x) = x^2$

Aquí es claro que las funciones f y g son iguales, mientras que las funciones f y h no lo son ya que su codominio no es el mismo (este punto será más fácil de entender cuando repasemos la inyectividad y sobreyectividad de funciones).

2.1. Inyectividad y Sobreyectividad.

Pasamos ahora a estudiar algunas características de las funciones,

Definición 2.1.1 (Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva)
Sea $f : A \to B$

- *Decimos que* f *es inyectiva si*

$$\forall\, x,\, y\, \in A\,;\ \textit{si } f(x) = f(y)\ \ \textit{implica que } x = y.$$

- *Decimos que* f *es sobreyectiva si*

$$\forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A \;/\; f(x) = y.$$

- *Decimos que una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Observación: Es condición necesaria y suficiente para que una función $f : A \to B$ sea inyectiva, que se cumpla el contra recíproco de la definición anterior. Es decir, $f : A \to B$ es inyectiva, si y sólo si

$$\forall\, x,\, y\, \in A,\ \text{con } x \neq y, \text{ se cumple que } f(x) \neq f(y).$$

Ejemplo 2.1.1
Consideremos las siguientes funciones:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $f(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $i(x) = x^2$.

Se puede ver de inmediato que se trata de cuarto funciones distintas.

La función f no es ni inyectiva ni sobreyectiva ya que $f(-1) = f(1) = 1$ y de aquí que no es inyectiva, además $f(x) = x^2 \geq 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$, de aquí que no existe ningún elemento en el dominio de f tal que su correspondiente sea, por ejemplo, -2. Así la función f tampoco es sobreyectiva.

La función g no es inyectiva por el mismo motivo que f no lo es. Sin embargo, g es sobreyectiva ya que si $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces existe su raíz cuadrada, tomando $x = \sqrt{y}$ tenemos que $g(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$.

La función h es inyectiva, verifiquemos esto:
Si $x, \, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ entonces tenemos que $f(x) = f(y)$ implica que $x^2 = y^2$, tomando raíz cuadrada tenemos que $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$, es decir, $|x| = |y|$, pero como $x, \, y \geq 0$ tenemos que $|x| = x$ e $|y| = y$, de donde concluimos que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$. Por el mismo motivo que f, h no es sobreyectiva.

Utilizando las mismas herramientas que utilizamos con las funciones f, g y h es inmediato verificar que i es una función inyectiva y sobreyectiva, es decir, biyectiva.

Observación: Queda totalmente aclarado, que si dos funciones tienen distinto codominio, no pueden ser iguales. Por ejemplo, las funciones f y g anteriores sólo difieren en su codominio, pero g es sobreyectiva y f no. De igual modo, si dos funciones tienen distinto dominio, no son iguales.

2.2. Imagen y Preimagen

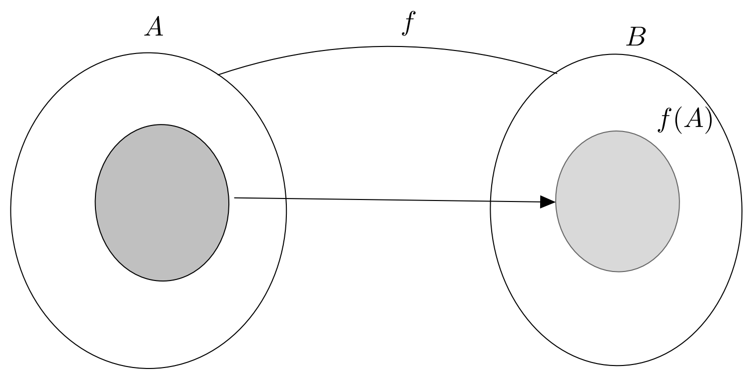
Retomemos las ideas sobre la imagen y preimagen del principio de la sección.

Definición 2.2.1 (Conjunto Imagen)
Dada una función $f : A \to B$ y un conjunto X; $X \subset A$, llamamos **imagen** *de X por f al*

conjunto

$$f(X) = \{f(x) \ / \ x \in X\} = \{y \in B \ / \ y = f(x), x \in X\}.$$

Aprovechemos la definición anterior, para definir el **recorrido de una función**, éste lo definimos como la imagen del dominio, es decir, si $f : A \to B$ entonces el **recorrido** de f es $f(A)$.



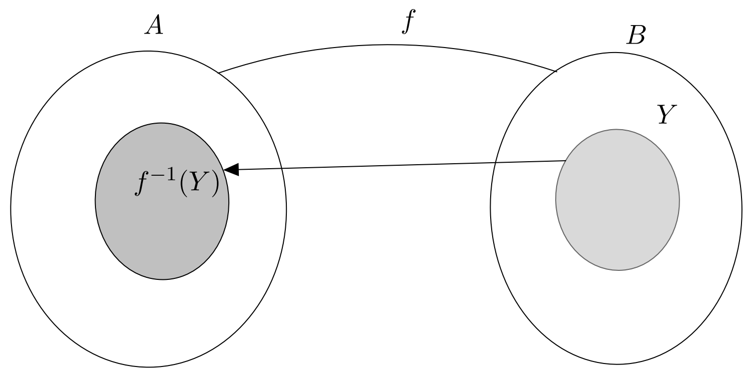
Definición 2.2.2 (Conjunto preimagen)
Consideremos una función $f : A \to B$ y un conjunto Y; $Y \subset B$, llamamos preimagen de Y *por f al conjunto*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \ / \ f(x) \in Y\}.$$

Nuevamente aquí puede surgir una duda que más vale no tenerla. Al anotar al conjunto preimagen de Y con $f^{-1}(Y)$, para nada estamos hablando de la función inversa de f, es más, hasta el momento no sabemos que significa "función inversa". Al anotar $f^{-1}(Y)$ hay que remitirse a la definición, o sea: $f^{-1}(Y) = \{x \in A \ / \ f(x) \in Y\}$. Ver Figura

Demos algún ejemplo de conjunto preimagen.

Ejemplo 2.2.1
Consideremos las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = sen(x)$. Hallemos el conjunto preimagen del conjunto $\mathbb{Z}$ por f y el conjunto preimagen del conjunto $\mathbb{R}^+$ por g. $f^{-1}(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}$ ya que $f(x) = 1 \in \mathbb{Z} \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Mientras que $g^{-1}(\mathbb{R}^+) = \{x \in [0, 2\pi] \ / \ sen(x) \in \mathbb{R}^+\} = (0, \pi)$ ya que $sen(0) = sen(\pi) = sen(2\pi) = 0$ y



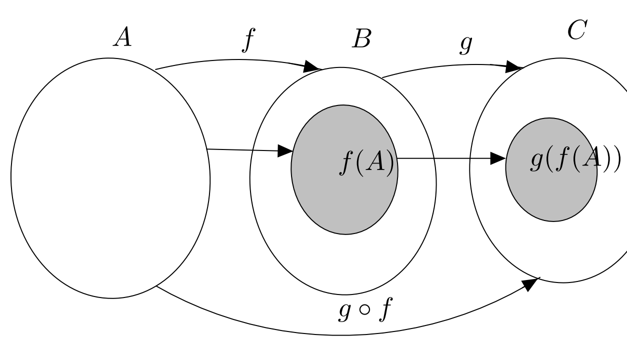
$sen(x) < 0$ si $x \in (\pi, 2\pi)$.

2.3. Composición

Definición 2.3.1 (Función compuesta)
Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : C \to D$, tal que $f(A) \subset C$, definimos la función compuesta de f con g, a la que anotamos $g \circ f$, mediante:

$$g \circ f : A \to D \;\; \textit{tal que} \;\; (g \circ f)(x) = g(f(x)) \;\; \forall\, x \in A.$$

Es bueno notar, que si bien, al hacer la composición de f con g, no son necesariamente utilizados todos los elementos del conjunto B, la función $g \circ f$ está bien definida, ya que para todo $x \in A$ existe un elemento $y \in D$ tal que $(g \circ f)(x) = y$.

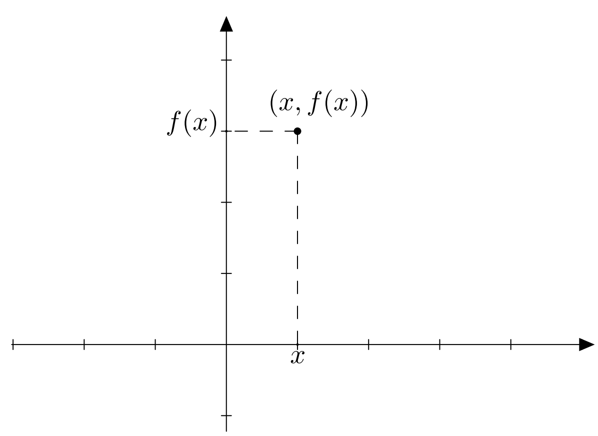


2.4. Gráfico de una función

Adelantándonos un poco al capítulo siguiente consideraremos un subconjunto de reales, $X \subset \mathbb{R}$ y una función $f : X \to \mathbb{R}$ con una determinada regla de asignación $f(x) = y$, además tomaremos un sistema de ejes cartesianos. Para cada $x \in X$, existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$ y por tanto podemos considerar el par ordenado $(x, f(x)) \in X \times \mathbb{R}$. Como $X \subset \mathbb{R}$, se tiene que el par $(x, f(x)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. (Notación: Usualmente se denota $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ como $\mathbb{R}^2$.) Por tanto el par $(x, f(x))$ puede ser asociado con un único punto del plano $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas son las anteriormente mencionadas. Tomando en cuenta las consideraciones anteriores tenemos la siguiente

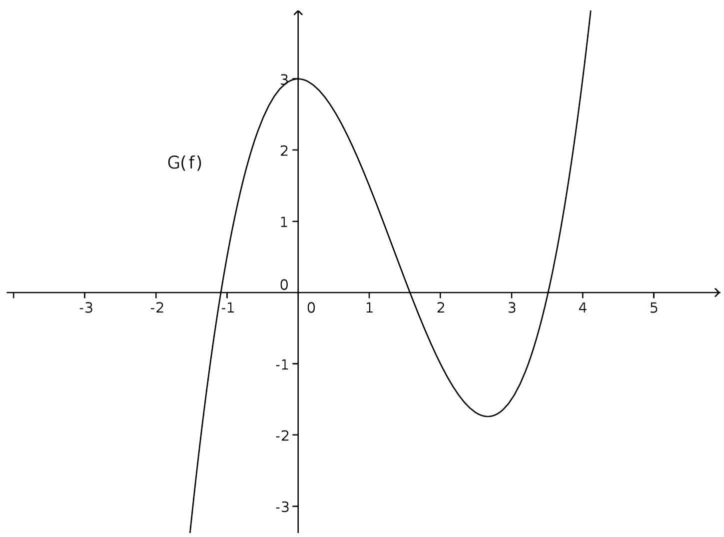
Definición 2.4.1
Sea $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, se llama gráfico de f y se denota $G(f)$ al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ tal que sus coordenadas son de la forma $(x, f(x))$.

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ tal\ que\ x \in X, \ \ y = f(x)\}$$



Ejemplo 2.4.1
Consideremos por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 + 3$. Podemos realizar una tabla de valores para calcular algunas imágenes y obtener puntos del gráfico de f.

x	$f(x)$
0	3
-1	$1/2$
3	$-3/2$
1	$3/2$



Ejercicio 6

1. Se considera $X = \{-3, -1, 0, 2, 4, 7\}$ como dominio de f y $B = \{-2, -1, 0, 1, 3, \pi, 8, 10\}$ tal que $f(-3) = 0,\ f(-1) = 8,\ f(0) = \pi,\ f(2) = 8,\ f(4) = 3,\ f(7) = 1$. Representar mediante un diagrama de flechas y efectuar el gráfico de f en un sistema de ejes cartesianos.

2. Se considera $h : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$, calcular $h(0),\ h(-1),\ h(\pi), h(\sqrt{2}), h(3)$.

3. Se considera $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2-2x}$, calcular $g(1), g(-1), g(3), g(-\sqrt{3}), g(-\pi), g(1/3), g(x+1), g(x-1)$.

4. Sea $j : \mathbb{R}\backslash\{-3\} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = \frac{x^2+x}{x+3}$ y $k : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = \frac{1}{x}$. Determinar si son posibles las siguientes composiciones, en caso contrario determinar una función de dominio más amplio posible cuya regla de asignación sea la que se obtendría mediante la composición.

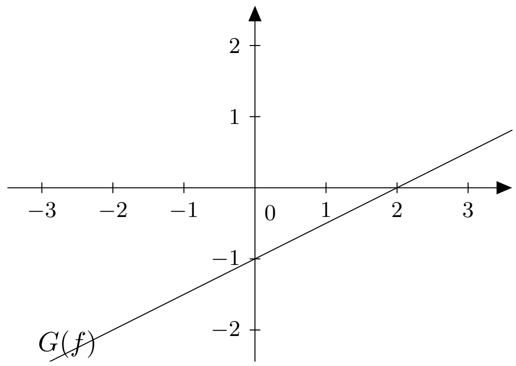
    a) $j \circ k$

    b) $k \circ j$

    c) $j(cx),\ \ c \in \mathbb{R}$

    d) $k(cx),\ \ c \in \mathbb{R}$

5. Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfico se representa en la siguiente figura: Sin



encontrar la expresión de f, hallar el gráfico de las siguientes funciones:

a) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) + 1$.

b) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = f(x) - 2$.

c) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = f(x + 1)$.

d) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = f(x - 1)$.

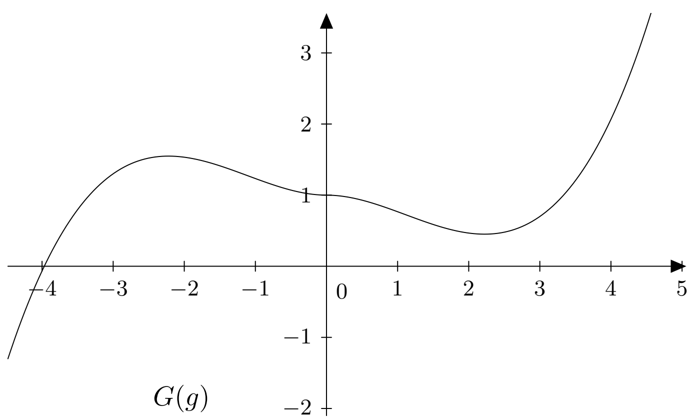
e) $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $m(x) = f(-x)$.

f) $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -f(x)$.

g) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = -f(-x)$.

h) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 2f(x)$.

6. Se considera $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico se muestra a continuación, hallar los gráficos de las



funciones de forma análogas a lo hecho en la parte anterior.

7. Deducir una regla general a partir de lo observado en las partes 5 y 6.

8. Graficar las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x$.

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = -2x$.

d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = |x|$.

e) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = |x| - 1$.

f) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = |x| + x$.

g) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = x^2$.

h) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = x^2 - 1$.

i) $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^2 + x$.

j) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = -x^2 + 1$.

k) $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

9. Graficar las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$

e) $j : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

f) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $k(x) = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x = 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \neq 1 \end{cases}$

g) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$