Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Métodos Numéricos

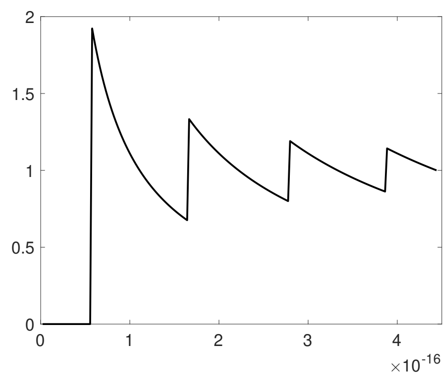
EXAMEN 4 DE FEBRERO DE 2025.

N° de examen	Apellido y Nombre	Cédula

El examen dura 3 horas. No se puede utilizar material.

Ejercicio 1. [7+6+6+6=25 puntos] Sea $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-(1-x)}{x}$. Naturalmente, si se cancelan los unos en el numerador, entonces es fácil observar que $f(x) = 1$ para todo x. Sin embargo, al ejecutar los comandos en Octave que se muestran abajo a la izquierda, se obtiene la figura de la derecha.

```
f = @(x) (1-(1-x))./x;
x = 0.01:.01:2;
x = eps*x;
plot(x,f(x))
```



a) Definir qué es el epsilon de máquina ε_M y calcularlo para el formato de precisión doble.

b) Justificar por qué $f(x) = 0$ para $x < \frac{\varepsilon_M}{4}$.

c) Justificar por qué $f(x)$ salta de 0 a aproximadamente 2 alrededor de $x = \frac{\varepsilon_M}{4}$.

d) ¿Por qué f oscila para $x \in (\frac{\varepsilon_M}{4}, 2\varepsilon_M)$?

Ejercicio 2. [10+7+8=25 puntos] Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ invertible, con entradas positivas.

a) Escribir la iteración asociada al método de Jacobi y probar que si $\det(A) > 0$ entonces el método define una sucesión que converge a $\mathbf{x}$.

b) Estudiar la convergencia del método de Jacobi en caso de que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Para la matriz A de la parte anterior, escribir la iteración asociada al método de Jacobi relajado. ¿Existe alguna relajación de dicho método que sea convergente a $\mathbf{x}$? Justificar.

Ejercicio 3. [9+9+7=25 puntos] Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$.

a) Computar el polinomio interpolante a f por los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$ y dar una cota superior para el error de interpolación.

b) Computar la interpolante lineal a trozos de f por los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$ y dar una cota superior para el error de interpolación.

c) Sea n un número entero grande. Se considera interpolar la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ usando $n+1$ nodos equiespaciados, $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ con una interpolación polinomial de grado máximo o una interpolación lineal a trozos. Calculando el error de interpolación de ambas opciones, justificar cuál de las dos se espera que aproxime mejor a f.

Ejercicio 4. [5+7+13 = 25 puntos] Dada $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tan regular como sea necesario, consideramos el problema de valores iniciales,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{PVI}$$

y el método de Runge-Kutta con paso constante $h > 0$,

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_k, y_k), \\ K_2 &= f\left(t_k + \frac{2h}{3},\, y_k + \frac{2h}{3} K_1\right), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{4} K_1 + \frac{3h}{4} K_2. \end{aligned}$$

a) ¿Es un método implícito o explícito? Justificar.

b) Se considera el problema (PVI) con $f(t, y(t)) = \cos(\pi y(t)) + t$, $t_0 = 0$, $y_0 = 0$. Determinar el valor de y_1 para el método de Runge-Kutta descrito anteriormente, con paso $h = 1$.

c) Probar que el método descrito es de orden 2.

Algunas propiedades útiles.

Formato de precisión doble. Los números de punto flotante en precisión doble son aquellos que se pueden escribir de la forma

$$x = \pm(1 + f) \times 2^e,$$

donde

$$f = \frac{j}{2^{52}}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, 2^{52} - 1\} \quad \text{y} \quad e \in \{-1022, -1021, \ldots, 1023\}.$$

Error de interpolación polinomial. Sean f de clase C^{n+1} en un intervalo $[a, b]$, los puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ en el intervalo $[a, b]$, y p_n el polinomio interpolante por $\{(x_i, f(x_i)\}_{i=0,\ldots,n}$. Entonces, para cada $x \in [a, b]$ existe un $\gamma_x \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma_x)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$