

Informe 2 - Péndulo simple

analizado con Estadística

Objetivos

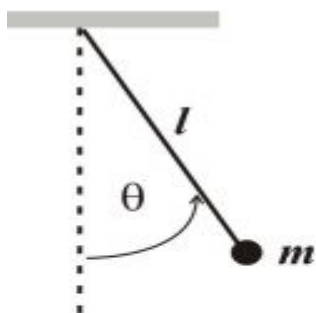
El principal objetivo de la práctica es medir la aceleración gravitatoria a partir de un experimento. A su vez, vamos a poder evidenciar la importancia de las cifras significativas y su incertidumbre al hacer una medida.

Fundamento teórico

Para poder entender por qué vamos a utilizar un péndulo simple para poder medir la aceleración gravitatoria debemos explicar en que se basa esta idea.

A través del péndulo simple podemos idealizar un sistema físico real (masa suspendida de un hilo cuyo peso es muy chico comparado al de la masa).

La idealización de este sistema consiste en despreciar todo tipo de fuerza de rozamiento y tomar que las oscilaciones del péndulo son en un plano.



Al plantear Newton en un sistema de ejes de coordenadas cilíndricas, llegamos en el eje e_θ a: $\theta'' + g/l(\sin \theta) = 0$

Podemos linealizar esta ecuación ya que estamos en el caso de pequeñas oscilaciones entonces $\sin \theta$ se aproxima a θ .

Al resolver la ecuación se llega a $(\theta')^2 = g/l$ siendo θ' la velocidad angular del péndulo. Sabiendo que w (velocidad angular) = $2\pi / T$; llegamos a que el período $T = 2\pi \sqrt{g/l}$.

Ahora vamos a introducir el concepto de aceleración de la gravedad (g) cuyo valor aparece en la ecuación pero por ahora no sabemos ni qué es ni cuánto vale.

Sabemos que la fuerza de la gravedad consiste en la atracción entre dos cuerpos y se define como:

$$F = -(G M m) / R^2 \text{ según el versor } \hat{r}$$

Dónde R es la distancia entre los objetos de masas m y M ; $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ es la constante de Newton y $\hat{r}$ es un versor que define la línea que conecta los centros de masa de los dos cuerpos. Cuando calculamos esta fuerza para el movimiento de los cuerpos cerca de la superficie de la Tierra, basta con tomar M y R como la masa y radio medios de la Tierra, respectivamente: $M_{\text{tierra}} = 5,97.1024 \text{Kg}$ y $R_{\text{tierra}} = 6371 \text{Km}$. Al tomar estos datos y tomando un valor esperado de $g = (GM)/R^2 \approx 9,8163 \text{m/s}^2$ llegamos a la ecuación del peso ($F=mg$) en dónde m es la masa de un cuerpo cualquiera, cuyo movimiento se quiere describir.

Estrictamente hablando, g no es constante para todos los cuerpos, ya que depende de la distribución de masa y de la distancia al centro de la Tierra. Esta dependencia nos perjudica a la hora de medir su valor (para un cuerpo dado) ya que este mismo se ve afectado por la localización geográfica y la cercanía de algunos cuerpos astronómicos.

Dispositivo experimental

Para esta práctica buscamos modelar un péndulo simple, para lo que utilizamos una masa (de 2,5 kg), atada a una tanza (de largo 0,665 m) inextensible y de masa despreciable, la cual estaba colgada de un soporte. Es importante considerar el hecho de que el período depende del largo de la tanza, pero no de la masa. De todas formas, tuvimos extrema precaución con el hecho de que el punto de donde estaba atada la masa estuviera lo más fijo posible, para simular el péndulo (no debía haber traslación). De este modo soltamos la masa para que realice el movimiento, intentando que lo único que actuara en ella sea el peso, despreciando el rozamiento del aire, y medimos el tiempo que tardaba en volver al mismo punto (el período). Esto lo realizamos de dos maneras: con un cronómetro de mano, y con un sensor fotopuerta de láser infrarrojo. Es claro ver que la precisión del sensor (0,0001s), es mucho mayor que la del cronómetro (0,01s), por lo que estimamos que con la serie de datos del primero llegaremos a un mejor valor del período, y por lo tanto de la aceleración. Además debemos tener en cuenta que al utilizar el cronómetro pueden existir errores de medición por parte de la persona tomando los datos, por el tiempo de reacción de esta. Por esta razón, para disminuir la probabilidad de error de las mediciones, medimos de a 5 períodos; en el caso del sensor tomamos el promedio de todos, mientras que en el cronómetro dividimos el tiempo total entre 5 para obtener un período con menor incertidumbre que habiendo tomado un sólo período. Por último, con motivo de nuevamente reducir los errores existentes, repetimos el procedimiento 50 veces, para con el promedio hallar el período con la mayor precisión posible.



Análisis de datos

Medidas del período:

Se presentarán los histogramas correspondientes de ocurrencias para el período medido con cronómetro y con sensor, con curva Gaussiana superpuesta.

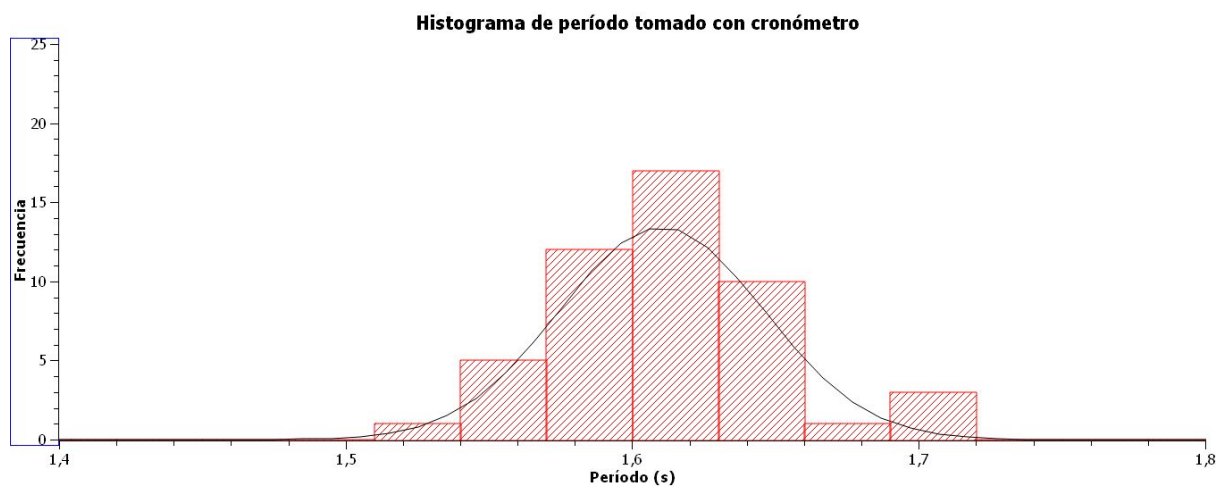


Figura 1: Histograma de período tomado con cronómetro

El criterio de descarte que consideramos es tomar los datos a más de $2,5s$ del promedio como datos atípicos (siendo s la desviación estándar). Eliminando esos datos redujimos la probabilidad de error, ya que esos datos tienen probabilidad de ser 5% erróneos. Para el caso del cronómetro, encontramos un dato atípico que se encontraba apartado de $\bar{x}$ más

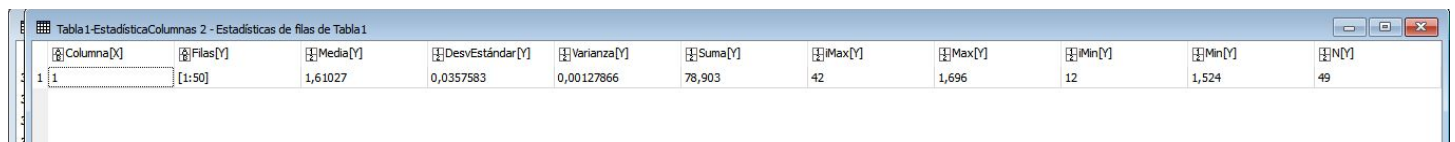
de 2,5s. Por lo tanto, aplicamos el criterio de descarte, quedándonos con 49 datos. Una vez hecho esto, comenzamos a trabajar con nuestro histograma. Sabemos que encontramos nuestro promedio y nuestra desviación con las siguientes fórmulas:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Esto será útil ya que, para definir nuestro período tomado con el cronómetro, vamos a tomar el promedio de nuestras medidas con una incertidumbre de $s/\sqrt{n}$. Es decir:

$$T_{\text{cronómetro}} = \bar{x} \pm s/\sqrt{n}$$

Tomamos estos valores de la tabla estadística que genera Scidavis con nuestros datos.



	Columna[X]	Filas[Y]	Media[Y]	DesvEstándar[Y]	Varianza[Y]	Suma[Y]	Max[Y]	Max[Y]	Min[Y]	Min[Y]	N[Y]
1	1	[1:50]	1,61027	0,0357583	0,00127866	78,903	42	1,696	12	1,524	49

$$\bar{x}=1.61027$$

$$s=0.0357583$$

$$n=49$$

Por lo tanto $T_{\text{cronómetro}}=1.61027 \pm 0.00081 \text{ s}$

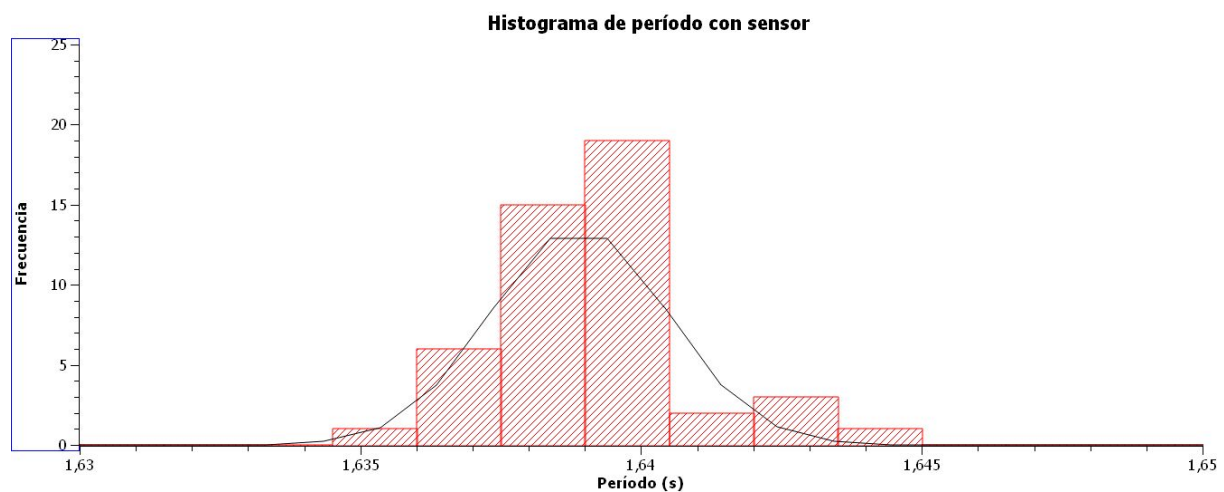


Figura 2: Histograma de período tomado con sensor

De forma análoga, hemos aplicado el criterio de descarte para los datos del sensor, eliminando así tres datos que se ubicaban apartados más de 2.5s del promedio. Proseguimos con el cálculo de nuestro valor promedio de T_{sensor} . Nuevamente haremos uso de la tabla que proporciona Scidavis:

Tabla1-EstadísticaColumnas 5 - Estadísticas de filas de Tabla1										
Columna[X]	Filas[Y]	Media[Y]	DesvEstándar[Y]	Varianza[Y]	Suma[Y]	#Max[Y]	Max[Y]	#Min[Y]	Min[Y]	N[Y]
1	1	1,63889	0,00157748	2,48844e-06	77,028	10	1,644	49	1,636	47

$$\bar{x}=1.63889$$

$$s=0.00157748$$

$$n=47$$

$$\text{Por lo tanto } T_{\text{sensor}}=1.63889 \pm 0.00023 \text{ s}$$

Una vez que obtuvimos nuestro período para cada caso, calcularemos nuestra aceleración gravitatoria con su incertidumbre.

Partimos de la fórmula ya vista en el fundamento teórico

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

De aquí podemos despejar g

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

gcronómetro= 10.12474

gsensor=9.77421

Para calcular su incertidumbre usamos la ley de propagación de incertidumbre.

$$\Delta g^2 = (dg/dL)^2 \Delta L^2 + (dg/dT)^2 \Delta T^2 = (4\pi^2 / T^2)^2 \Delta L^2 + (-8\pi^2 L / T^3)^2 \Delta T^2$$

Sustituyendo: L=0.665 m $\Delta L=0.001$ m, Tcronómetro=1.61027s, $\Delta T_{cronometro} = 0.00081$ s,

Tsensor=1.63889s, $\Delta T_{sensor} = 0.00023$ s

Llegamos a nuestras incertidumbres de g para ambos casos.

$\Delta g_{cronometro} = 0.01839$

$\Delta g_{sensor} = 0.01827$

Por lo tanto,

gcronómetro= 10.12474 ± 0.01839

gsensor=9.77421 ± 0.01827

Al comparar las series de datos tomadas por el cronómetro y por el sensor, tenemos que considerar que ambas pueden ser tomadas como distribuciones normales. Podemos decir esto ya que todos los datos fueron tomados en las mismas condiciones y además la función que nos da el valor de T es continua.

En el caso del sensor, los datos son mucho más precisos, ya que la desviación estándar es menor. Sin embargo, en este histograma no vemos con tanta claridad la distribución normal, que podemos concluir que se debe a discrepancias en el momento de la medición, como puede ser la forma de soltar la masa, o el ángulo de las pequeñas oscilaciones.

Por otro lado, las mediciones con el cronómetro fueron menos precisas, y a la vez menos exactas ya que el período promedio nos dio menor que en el sensor, lo que hizo que la aceleración resulte menos exacta.

El valor de g encontrado mediante la medida del período con cronómetro se aleja bastante del valor teórico 9,8163 m/s² (una diferencia de 0,3084). En el caso del sensor esta diferencia es menor; 0,0421. Estas diferencias respecto al valor teórico se deben principalmente a las incertidumbres relacionadas con la manipulación de los objetos de medida y al no tomar en cuenta la posición geográfica exacta (la variación de latitud influye).

Datos de Aceleración

Debido a la mayor precisión del sensor, decidimos trabajar con los datos proporcionados

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

por éste. Por cada dato calculamos el valor de g:

Luego, construimos el histograma a partir de estos valores.

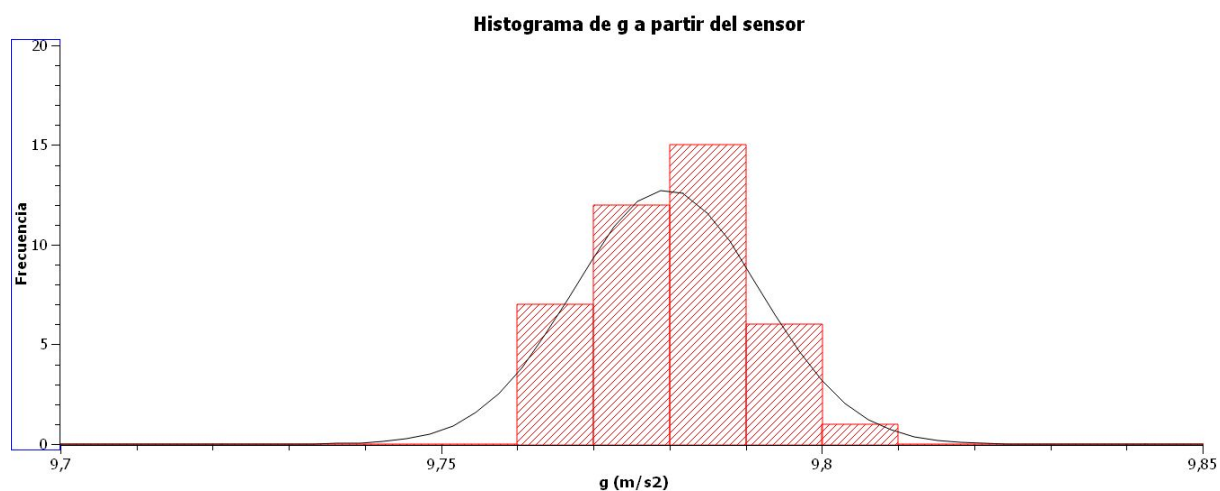


Figura 3: Histograma de g tomado con sensor

Nuevamente usamos el criterio de descarte de los datos atípicos, quedándonos con 41 datos. Usaremos también los valores de la media y de la desviación estándar que nos brinda Scidavis para llegar al valor de g como el promedio con su respectiva incertidumbre:

Tabla1-EstadísticaColumnas 2 - Estadísticas de filas de Tabla1										
	Columna[X]	Filas[Y]	Media[Y]	DesvEstándar[Y]	Varianza[Y]	Suma[Y]	Max[Y]	Max[Y]	Min[Y]	Min[Y]
1	1	[1:50]	9,7796	0,012248	0,000150014	400,964	49	9,80878	5	9,76099
										41

$$\bar{x}=9.7796$$

$$s=0.0019$$

$$n=41$$

$$\text{Por lo tanto } g=9.7796 \pm 0.0019 \text{ m/s}^2$$

Se puede observar que hemos llegado a una buena aproximación de g con este método, sin embargo, el método anterior nos permitió llegar a un valor más próximo de g.

Al observar la gráfica observamos que los valores de g calculados no pueden ser aproximados por una distribución normal ya que g es proporcional a $1/T^2$.

El valor de g al cual llegamos se aproxima mucho al resultado numérico; la diferencia es de 0.00539. (**9.7796-9.77421**).

Conclusiones

A partir del análisis de los resultados podemos observar que los valores de aceleración obtenidos experimentalmente mediante el valor de T no concuerdan con el valor teórico ni entre sí ya que hay una diferencia de 0,35053 (gcronómetro- gsensor).

Sin embargo, para el caso del sensor podemos decir que el valor teórico se encuentra casi dentro del intervalo de incertidumbre (9.77421 ± 0.01827) y entonces llegamos a la conclusión de que el sensor es un instrumento de medida más exacto.

Los comportamientos estadísticos fueron los esperados. En el caso del período sabíamos que los datos se iban a aproximar a la curva normal debido a las condiciones de medida. Contrariamente a esto, en el caso de la aceleración la aproximación a la curva normal no es posible a causa de la proporcionalidad de g con $1/T^2$.