Contenido

OBJETIVOS

Realizar un análisis estadístico de medidas tomadas de un péndulo simple, para calcular el valor de la aceleración gravitatoria (g).

FUNDAMENTO TEÓRICO

Un péndulo simple es un sistema que consiste en una masa puntual, suspendida desde un punto mediante un hilo, el cual se considerará a efectos prácticos inextensible y de masa despreciable. Dicha masa describe un movimiento oscilatorio en un plano.

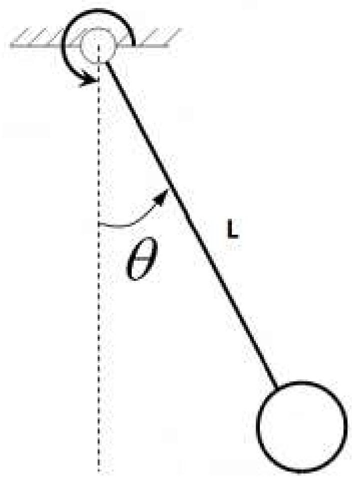

Figura 1: Péndulo simple.

Al aplicar la segunda ley de Newton al sistema y observando la componente tangencial al movimiento circular que presenta, se obtiene la siguiente ecuación:

$$mg \sin\theta = -mL\ddot{\theta}$$

Donde θ es el ángulo respecto al eje vertical, g es la aceleración gravitatoria y L es el largo del hilo. Dividiendo ambas partes de la ecuación entre *m* y *L* y despejando:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Esta ecuación se puede aproximar linealmente para ángulos pequeños de la siguiente manera:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Con esta aproximación se resuelve fácilmente la ecuación diferencial, obteniendo:

$$\theta = \theta_i \sin(\omega t)\ ;\ \ddot{\theta} = -\omega^2\theta_i \sin(\omega t) \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L}$$

De manera que la ecuación diferencial se hace cero en el tiempo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{L}} \ \Rightarrow \ g = \frac{LT^{\ 2}}{4\pi^2}$$

La aceleración gravitatoria *g* es la aceleración que surge de la fuerza de gravedad que sufren los cuerpos cercanos a la Tierra. En general, la fuerza de gravedad se define como:

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

Siendo *G la* constante de gravitación universal, m_1 y m_2 las masas en cuestión, *r* la distancia que las separa y $\hat{r}$ el versor en la dirección que une los centros de masa de ambos cuerpos. En el caso de la Tierra, se conocen los datos de su masa (*M*) y radio (*R*), por lo que es posible calcular esta fuerza para un objeto de masa *m* situado en su superficie:

$$\vec{F} = m\vec{g}\ ; g = \frac{gM}{R^2}$$

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Para calcular *g*, se mide el período de un péndulo simple. Dicho péndulo consta de una masa unida mediante un hilo a un soporte. Se mide el largo del hilo y se sitúa un sensor en el punto de equilibrio del péndulo. El sensor, registra el momento en que la masa pasa por dicho punto y mide el tiempo que tarda en volver a pasar. De este modo, utilizando el programa LoggerPro para tomar estos datos, se registra el semiperíodo del péndulo. Se deja oscilar el péndulo de modo de poder medir 5 períodos (se mide simultáneamente con el sensor y con un cronómetro de mano), repitiéndose este procedimiento 10 veces hasta contar con 50 medidas del período con cada instrumento.

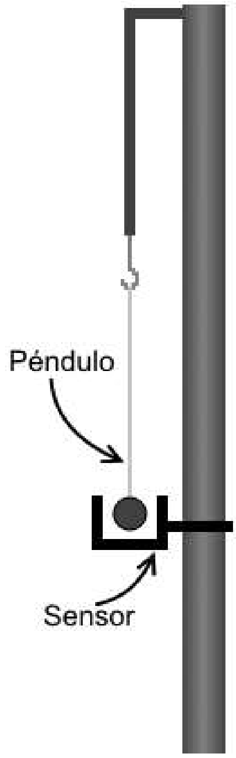

Figura 2: Esquema de la experiencia. El péndulo se mueve en el plano perpendicular al dibujo.

Con el cronómetro de mano se mide el tiempo que tarda la masa en pasar 5 veces por el sensor. Por lo que para registrar los 5 períodos correspondientes se divide el registro del cronómetro entre 5.

ANÁLISIS DE DATOS

Las distintas incertidumbres que surgen son: 10^{-3} m en la medida largo del péndulo; 10^{-4} s en las medidas del sensor y 10^{-2} s en las del cronómetro. Estas incertidumbres fueron determinadas según la apreciación de cada instrumento utilizado.

Datos:

$$L = 0{,}437m;\ \Delta L = 0{,}001m$$

$$\bar{T} = \frac{\sum_1^{50} T_i}{50} = 1{,}3328s$$

$$\Delta T^2 = {\sigma_T}^2 + {\sigma_{Texp}}^2 = 3{,}62 \times 10^{-6} s^2$$

Los registros de las mediciones son anotados en un archivo de texto ("crono-sensor.txt", adjunto en apéndice), para luego cargar en MatLab mediante el comando "load", así los datos son asignados a los valores a una matriz, en una columna los 50 datos del cronómetro y en la otra los del sensor.

Los valores con los registros de los períodos se muestran en la tabla 1 (en la primer columna los registros del cronómetro y en la segunda los registros del LoggerPro). Para el análisis se crea un vector con los datos de cada columna.

Tabla 1: Registro de los períodos (cronómetro y sensor).

6.61	1.3321
6.61	1.3321
6.61	1.3307
6.61	1.3350
6.61	1.3289
6.64	1.3331
6.64	1.3351
6.64	1.3310
6.64	1.3322
6.64	1.3298
6.60	1.3332
6.60	1.3323
6.60	1.3318
6.60	1.3352
6.60	1.3312
6.60	1.3341
6.60	1.3328
6.60	1.3333
6.60	1.3352
6.60	1.3321
6.59	1.3353
6.59	1.3324
6.59	1.3332
6.59	1.3315
6.59	1.3347
6.66	1.3301
6.66	1.3325
6.66	1.3358
6.66	1.3312
6.66	1.3354
6.60	1.3307
6.60	1.3320
6.60	1.3380
6.60	1.3296
6.60	1.3335
6.64	1.3319
6.64	1.3327
6.64	1.3324
6.64	1.3334
6.64	1.3343
6.63	1.3370
6.63	1.3307
6.63	1.3338
6.63	1.3311
6.63	1.3335
6.60	1.3354
6.60	1.3317
6.60	1.3320
6.60	1.3326
6.60	1.3326

Con los vectores definidos realizamos los histogramas:

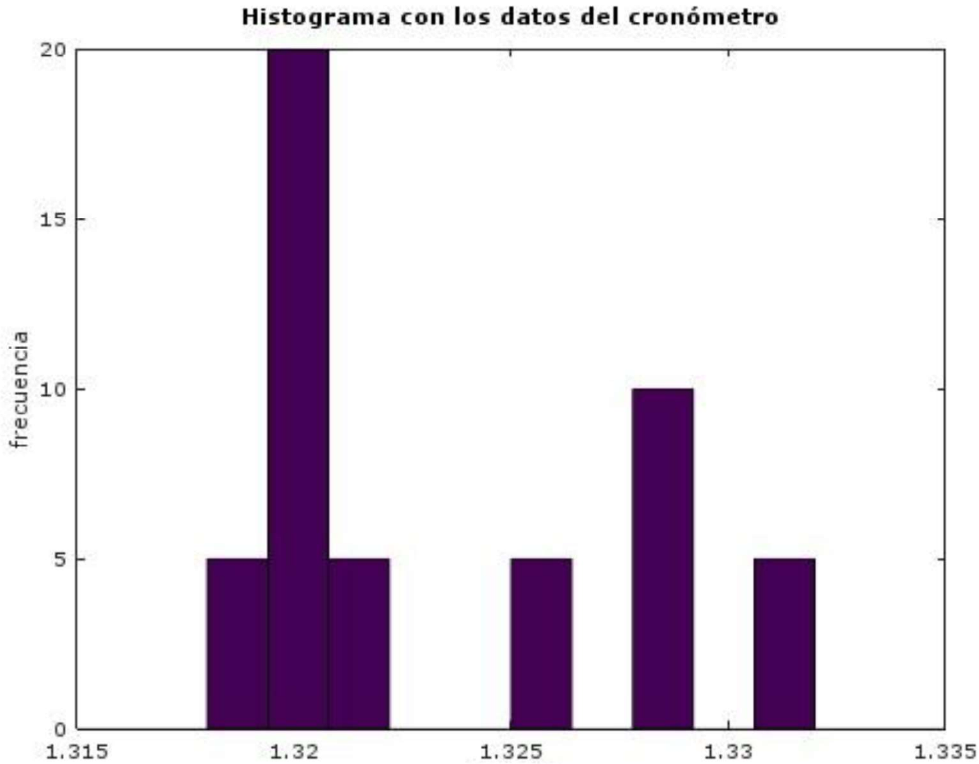

Figura 3: Histograma con los registros del cronómetro

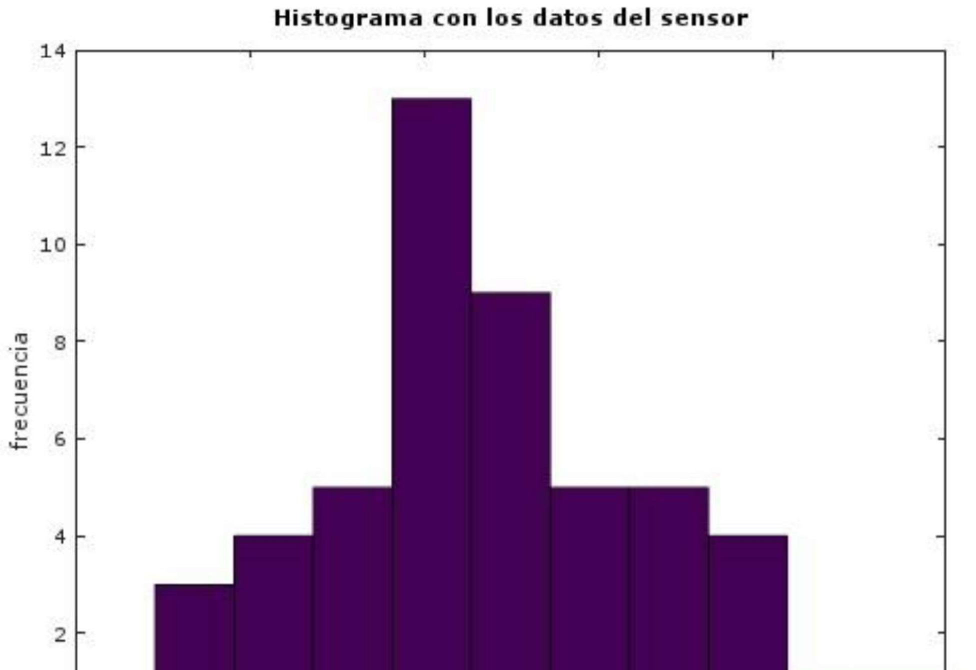

Figura 4: Histograma con los registros del sensor.

El histograma de los datos del sensor tiene una distribución similar a la gaussiana, por lo que si se normaliza, se pudede superponerla con el histograma:

A partir de estos datos es posible calcular el valor de *g* de diferentes maneras. Una de ellas es calculando el promedio de los períodos ($\bar{T}$), y con este valor y el del largo del péndulo *L* calcular *g* de la siguiente manera:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{\bar{T}^2}$$

$$g = 9{,}71\, {}^{m}/_{s^2}$$

Para calcular la incertidumbre:

$$\Delta g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial L}\right)^2 \Delta L^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 \Delta T^2 \Rightarrow \Delta g = 0{,}04 \frac{m}{s^2}$$

$$g = (9{,}71 \pm 0{,}04) \frac{m}{s^2}$$

CONCLUSIONES

Se realizó un análisis estadístico de una serie de medidas del período de un péndulo simple, a partir de la cual se obtuvo un valor para la constante de gravedad.

Se encontró que el valor de dicha constante es:

$$g = (9{,}71 \pm 0{,}04) \frac{m}{s^2}$$

Se observó que las mediciones del período con el sensor siguen una distribución gaussiana.

APÉNDICES

Cálculos:

$$\Delta T^2 = \sigma_T{}^2 + \sigma_{Texp}{}^2 = 10^{-4*2}s^2 + 0{,}0019^2 s^2 = 3{,}62 \times 10^{-6} s^2$$

$$g = \frac{4\pi^2 * 0{,}437\mathrm{m}}{(1{,}3328s)^2} = 9{,}71\, {}^{m}/_{s^2}$$

$$\Delta g^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2}\right)^2 \Delta L^2 + \left(\frac{-2 * 4\pi^2 L}{\bar{T}^3}\right)^2 \Delta T^2$$

$$\Delta g^2 = \left(\frac{4\pi^2}{(1{,}3328s)^2}\right)^2 (10^{-3}\mathrm{m})^2 + \left(\frac{8\pi^2 * 0{,}437\mathrm{m}}{(1{,}3328s)^3}\right)^2 3.62 \times 10^{-6} s^2$$
$$= 1{,}26 \times 10^{-3}\, \frac{m^2}{s^4}$$