1. Conjuntos

Ejercicio 1.1

Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos:

1. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}$
2. $B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 12\}$
3. $C = \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 2 = 0\}$

Solución:

1. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $B = \{0, 1, 2, 3\}$
3. $C = \{-1, 1\}$
4. $D = \emptyset$

Ejercicio 1.2

Nota: $A \setminus B$ denota el conjunto formado por los elementos de A que no son elementos de B (diferencia de conjuntos).

Consideremos $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Hallar $A \setminus B$, $A \cap B$, $(A \cup B) \setminus \{2, 3, 4\}$.

Solución:

- $A \setminus B = \{1, 6, 8\}$
- $A \cap B = \{2, 3, 4\}$
- $(A \cup B) \setminus \{2, 3, 4\} = \{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Ejercicio 1.3

Dados $B = \{x \in \mathbb{N} \;/\; 2 \text{ divide } x \text{ y } 3 < x < 9\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 9\}$.

Hallar todos los conjuntos D que verifican simultáneamente $D \subset C$, $\{6, 7\} \subset D$ y $B \cap D = \{6, 8\}$.

Solución:

Como $B \cap D = \{6, 8\}$ y $\{6, 7\} \subset D$ tenemos que $\{6, 7, 8\} \subset D$ y $4 \notin D$. Luego, las posibilidades para D son:

$$D = \{6, 7, 8\} \text{ y } D = \{5, 6, 7, 8\}.$$

2. Lógica

Ejercicio 2.1

Completar el cuadro siguiente:

$\mathcal{P}$	no $\mathcal{P}$
Las rectas $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ son perpendiculares.	Las rectas $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ no son perpendiculares.
Las rectas $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ son paralelas.	Las rectas D y D' no son paralelas
13=12	$13 \neq 12$
$x \in \mathbb{N}$.	$x \notin \mathbb{N}$
$x \neq 1$.	$x = 1$
$x > 0$.	$x \leq 0$
$x \leq 1$	$x > 1$
$x - 2 = 0$	$x - 2 \neq 0$

Ejercicio 2.2

Las expresiones **"existe al menos un..."** y **"para todo..."** se utilizan para precisar cuántos elementos de un conjunto verifican una proposición, si todos o algunos. En matemática el "existe" se denota con el simbolo "$\exists$" y el "para todo" con el símbolo "$\forall$" y reciben el nombre de cuantificadores.

Completar utilizando un cuantificador las proposiciones siguientes para que sean verdaderas:

1. $(x+1)^2 = x^2 + 1$.
   Solución: $\exists\ x \in \mathbb{R}\ (x = 0)$ tal que $(x+1)^2 = x^2 + 1$.

2. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
   Solución: $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0$.
   Solución: $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0,\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.
   Solución: $\exists\ x \in \mathbb{R}\ (x = 1)$ tal que $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.

Ejercicio 2.3

Utilizando cuantificadores, escribir la **negación** de los siguientes enunciados sobre la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$:

1. "La función f tiene al menos una raíz"($\exists x \in [0,1]$ tal que $f(x) = 0$).
   Solución: $\forall\ x \in [0,1], f(x) \neq 0$.

2. "La función f tiene máximo absoluto"($\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq M$).
   Solución: $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\ x \in [0,1]$ tal que $f(x) > M$.

3. "Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $f(x) > -1$".
   Solución: $\exists\ x \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(x) \leq -1$.

4. "Para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in (0,1)$ tal que $f(x) < y$".
   Solución: $\exists\ y \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\ x \in (0,1),\ f(x) \geq y$.

3. Algebra

3.1. Operatoria básica

Ejercicio 3.1

Expresar en forma reducida cada uno de los siguientes números.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
2. $4\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $\frac{-3}{5}\left(\frac{2}{3} - 1\right) - \frac{4}{3}$
4. $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$
5. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}$
6. $\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right)$
7. $\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right)^3$
8. $\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^2$
9. $\left(\frac{1/3}{2/5}\right)^{-2}$

Solución:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$
2. $4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$
3. $-\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) - \frac{4}{3} = -\frac{17}{15}$
4. $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
5. $\frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{6}{13}$
6. $\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{17}{12}$
7. $\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{343}{3375}$
8. $\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{2^{12}}{3^{10}16}$
9. $\left(\frac{1/3}{2/5}\right)^{-2} = \frac{36}{25}$

Ejercicio 3.2

Calcular simplificando la respuesta lo más posible. Expresar el resultado como una sola fracción reducida.

1. $\frac{3}{5} - \frac{4}{3}$
2. $\frac{x}{yz} + \frac{y}{z}$
3. $\frac{3x}{5y} + \frac{4x}{2y^2}$
4. $\frac{3}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{2}$
5. $\frac{3}{4(x+1)} - \frac{7}{2(x-1)}$
6. $\frac{\frac{x^2-4}{x+1}}{\frac{x+2}{3x-5}}$
7. $\frac{xy}{yz} - \frac{y}{z}$
8. $\frac{1+\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}-1}$
9. $\frac{x+\frac{y}{z}}{\frac{y}{z}-z}$

Solución:

1. $\frac{3}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{11}{5}$
2. $\frac{x}{yz} + \frac{y}{z} = \frac{x+y^2}{yz}$
3. $\frac{3x}{5y} + \frac{4x}{2y^2} = \frac{6xy+20x}{10y^2}$
4. $\frac{3}{5^4} \cdot \frac{4}{3^5} \cdot \frac{5}{2} = 2$
5. $\frac{3}{4(x+1)} - \frac{7}{2(x-1)} = \frac{-11x-17}{4(x+1)(x-1)}$
6. $\frac{x^2-4}{x+1} \cdot \frac{3x-5}{x+2} = \frac{(x-2)(3x-5)}{(x+1)} = \frac{3x^2-11x+10}{x+1}$
7. $\frac{xy}{yz} - \frac{y}{z} = \frac{x-y}{z}$
8. $\frac{1+\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}-1} = -10$
9. $\frac{x+\frac{y}{z}}{\frac{y}{z}-z} = \frac{xz+y}{y-z^2}$

Ejercicio 3.3

Simplificar los siguientes radicales

1. $\sqrt{32}\sqrt{2}$
2. $\frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{54}}$
3. $\frac{\sqrt[4]{32x^4}}{\sqrt[4]{2}}$
4. $\sqrt{xy}\sqrt{x^3y}$
5. $\sqrt{16a^4b^3}$
6. $\frac{\sqrt[5]{96a^6}}{\sqrt[5]{3a}}$

Solución:

1. $\sqrt[2]{32} \cdot \sqrt[2]{2} = 8$
2. $\frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{54}} = -\frac{1}{3}$

3. $\frac{\sqrt[4]{32x^4}}{\sqrt[4]{2}} = 2|x|$

4. $\sqrt[2]{xy} \cdot \sqrt[2]{x^3y} = x^2|y|$, con $xy \geq 0$.

5. $\sqrt[2]{16a^4b^3} = 4a^2b\sqrt[2]{b}$, con $b \geq 0$.

6. $\frac{\sqrt[5]{96a^6}}{\sqrt[5]{3a}} = 2a$, con $a \neq 0$.

Ejercicio 3.4

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $2x + 12x^3$
2. $5ab - 8abc$
3. $x^2 + 7x + 6$
4. $x^2 - x - 6$
5. $2x^2 + 7x - 4$
6. $9x^2 - 36$
7. $6x^2 - 5x - 6$
8. $x^2 + 10x + 25$
9. $t^3 + 1$
10. $4t^2 - 9s^2$
11. $4t^2 - 12t + 9$
12. $x^3 - 27$
13. $x^3 + 2x^2 + x$
14. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
15. $x^3 + 3x^2 - x - 3$

Solución:

1. $2x + 12x^3 = 2x(1 + 6x^2)$
2. $5ab - 8abc = ab(5 - 8c)$
3. $x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$
4. $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$
5. $2x^2 + 7x - 4 = (2x - 1)(x + 4)$
6. $9x^2 - 36 = 9(x - 2)(x + 2)$
7. $6x^2 - 5x - 6 = (3x + 2)(2x - 3)$
8. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
9. $t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$
10. $4t^2 - 9s^2 = (2t - 3s)(2t + 3s)$
11. $4t^2 - 12t + 9 = (2t - 3)^2$
12. $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

13. $x^3 + 2x^2 + x = x(x + 1)^2$
14. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(x - 1)^2$
15. $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$

Ejercicio 3.5

Calcular las raíces de los siguientes polinomios y factorizarlos.

1. $P(x) = x^3 + 2x$
2. $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, sabiendo que 2 es raíz.
3. $S(x) = 8x^3 + 14x^2 - 5x - 2$ sabiendo que $\frac{1}{2}$ es raíz.

Solución:

1. $P(x) = x^3 + 2x = x(x^2 + 2)$ y su única raíz real es 0.
2. $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 1)(x + 2)$, y sus raíces $\{2, 1, -2\}$.
3. $S(x) = 8x^3 + 14x^2 - 5x - 2 = (2x - 1)(4x + 1)(x + 2)$, y sus raíces $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -2\}$.

3.2. Ecuaciones e inecuaciones

Ejercicio 3.6

Indicar si las siguientes ecuaciones son verdaderas para todo valor de las variables $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $\sqrt{x^2} = x$
2. $\sqrt{x^2 + 4} = |x| + 2$
3. $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+y}$
4. $\frac{16+x}{16} = 1 + \frac{x}{16}$
5. $\frac{1}{x^{-1}+y^{-1}} = x + y$
6. $\frac{2}{4+x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$
7. $(x^3)^4 = x^7$
8. $6 - 4(x + y) = 6 - 4x - 4y$

Solución:

1. $\sqrt{x^2} = x$, verdadera para $x \geq 0$.
2. $x^2 + 4 = |x| + 2$, falsa para todo x.
3. $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+y}$, falsa en general. Sólo es verdadera si $(x, y) \in \{(1, y) : y \neq -1\}$ o si $(x, y) \in \{(x, 0) : x \neq 0\}$.
4. $\frac{16+x}{16} = 1 + \frac{x}{16}$, verdadera.

5. $\frac{1}{x^{-1}+y^{-1}} = x + y$, falsa para todo x, y.

6. $\frac{2}{4+x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$, falsa para todo x.

7. $(x^3)^4 = x^7$, falsa en general. Sólo es verdadera para $x = 0$ o $x = 1$.

8. $6 - 4(x + y) = 6 - 4x - 4y$, verdadera.

Ejercicio 3.7

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones y expresarlas de forma factorizada si es posible:

1. $x^2 + 9x - 10 = 0$
2. $x^3 - 2x + 1 = 0$
3. $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$
4. $6(x + 1)(x + 6) = 0$
5. $(3x + 1)(x - 2) = 0$
6. $-2x^2 = 8x$
7. $x^2 + 6x - 1 = (x - 1)(x + 7)$
8. $\sin(x) = -1$
9. $\cos(x) = 0$
10. $\log_{10}(x) + \log_{10}(5) = \log_{10}(20)$
11. $2\log_{10}(x) - \log_{10}(4) = 1$
12. $e^{2x} = 25$
13. $|x| = 5$
14. $|x - 3| = |2x + 1|$

Solución:

1. $x^2 + 9x - 10 = (x + 10)(x - 1) = 0$, *Solución:* $x = -10$, $x = 1$.

2. $x^3 - 2x + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$, *Solución*: $x = -1, x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

3. $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$, *Solución*: $x = -1, x = -1 \pm \sqrt{2}$.

4. $6(x + 1)(x + 6) = 0$, *Solución:* $x = -1$, $x = -6$.

5. $(3x + 1)(x - 2) = 0$, *Solución:* $x = -\frac{1}{3}$, $x = 2$.

6. $-2x^2 = 8x$, *Solución:* $x = -4, x = 0$.

7. $x^2 + 6x - 1 = (x - 1)(x + 7)$, *Solución:* No existe solución.

8. $\sin(x) = -1$, *Solución:* $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

9. $\cos(x) = 0$, *Solución:* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

10. $x = 4$.

11. $x = \sqrt{40}$.

12. $x = \ln(5)$, ln representa el logaritmo natural, o logaritmo en base e.

13. $x = \pm 5$.

14. $x = -4, x = \frac{2}{3}$.

Ejercicio 3.8

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 2 \\ x - \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$

Solución:

1. $x = 1, y = 1$.

2. Sistema incompatible.

3. $x = 1, y = 0$.

4. $x = \frac{38}{19}, y = \frac{36}{19}$.

Ejercicio 3.9

Hallar

1. La ecuación de la recta que pasa por $P = (2, 3)$ y $Q = (4, 3)$.

2. La ecuación de la recta paralela a $y = 3x + 5$ y que pasa por $N = (1, 2)$.

3. La ecuación de la recta perpendicular a $y = -2x + 4$ y que pasa por $F = (0, -1)$.

Solución:

1. $y = 3$.

2. $y = 3x - 1$.

3. $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Ejercicio 3.10

Determinar para qué valores de x son ciertas las siguientes inecuaciones.

1. $4x - 2 > 3$
2. $x^2 + 4x + 1 \geq 0$
3. $x(x-1)(x-2)(x-3) < 0$
4. $4 - 3x \geq 6$
5. $1 + 5x > 5 - 3x$
6. $0 \leq 1 - x < 1$
7. $\frac{2-x}{1+x} \leq 0$
8. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0$
9. $\frac{x}{x-1} < \frac{2x+1}{x}$
10. $\sqrt{x+4} < x$

Solución:

1. $4x - 2 > 3 \implies x > \frac{5}{4}$.
2. $x^2 + 4x + 1 \leq 0 \implies x \leq -2 - \sqrt{3}$ o $x \geq -2 + \sqrt{3}$.
3. $x(x-1)(x-2)(x-3) < 0$, solución: $x \in (0,1) \cup (2,3)$.
4. $4 - 3x \leq 6 \implies x \leq -\frac{2}{3}$.
5. $1 + 5x > 5 - 3x \implies x > \frac{1}{2}$.
6. $0 \leq 1 - x < 1 \implies x \in [0,1)$.
7. $\frac{2-x}{1+x} \geq 0 \implies x \in (-1,2]$.
8. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0$, solución: $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$.
9. $\frac{x}{x-1} < \frac{2x+1}{x}$, solución: $x \in (0,1)$.
10. $\sqrt{x+4} < x$, solución: $x \in (\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \infty)$.

Ejercicio 3.11

Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $|x| < 3$
2. $|x| \geq 3$
3. $|x-4| < 1$
4. $|x+5| \geq 2$
5. $|5x-2| < 6$

Solución:

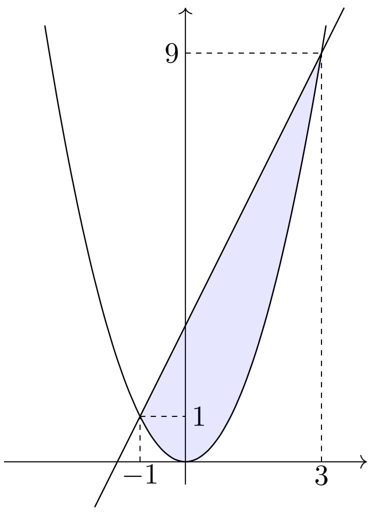
1. $|x| < 3 \implies x \in (-3, 3)$.
2. $|x| \geq 3 \implies x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.
3. $|x - 4| < 1 \implies x \in (3, 5)$.
4. $|x + 5| \geq 2 \implies x \in (-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$.
5. $|5x - 2| < 6 \implies x \in (-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$.

Ejercicio 3.12

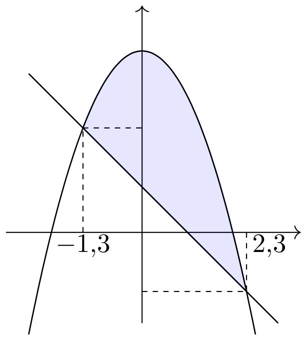
1. Se considera la región que incluye los puntos (x, y) que satisfacen las siguientes condiciones simultáneamente: $y \geq x^2$ y $y \leq 2x + 3$. Dibujar dicha región.
2. Se considera la región que incluye los puntos (x, y) que satisfacen las siguientes condiciones simultáneamente: $y \leq -x^2 + 4$ y $y \geq -x + 1$. Dibujar dicha región.
3. Se considera la región que incluye los puntos (x, y) que satisfacen las siguientes condiciones simultáneamente: $x^2 + y^2 \leq 4$ y $y \geq 0$. Dibujar dicha región.

Solución:

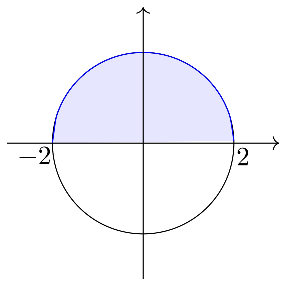
- Para $y \geq x^2$ y $y \leq 2x+3$: La región se encuentra entre la parábola $y = x^2$ (hacia arriba) y la recta $y = 2x + 3$ (hacia abajo). Intersecciones: Resolver $x^2 = 2x + 3$, da $x = -1$ y $x = 3$.



- Para $y \leq -x^2 + 4$ y $y \geq -x + 1$: La región se encuentra entre la parábola $y = -x^2 + 4$ (hacia abajo) y la recta $y = -x + 1$ (hacia arriba). Intersecciones: Resolver $-x^2 + 4 = -x + 1$, da $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{-2} \cong -1{,}3$ y $x = \frac{-1-\sqrt{13}}{-2} \cong 2{,}3$.



- Para $x^2 + y^2 \leq 4$ y $y \geq 0$: La región es la parte superior del círculo de radio 2 centrado en $(0, 0)$.

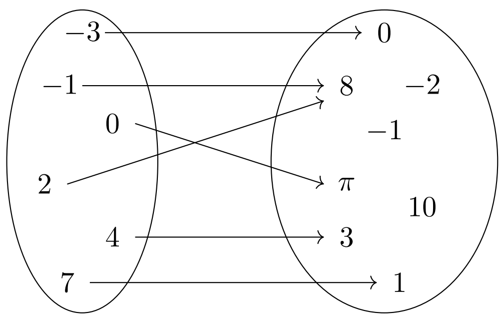


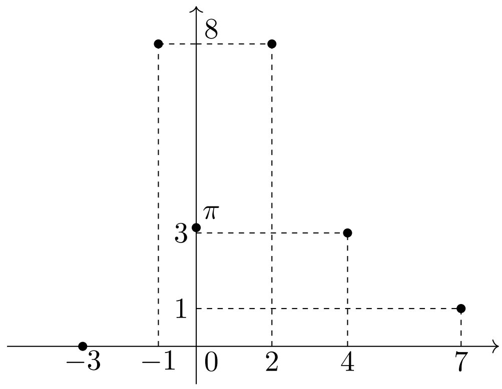
4. Funciones

Ejercicio 4.1

1. Se considera $X = \{-3, -1, 0, 2, 4, 7\}$ como dominio de f y $B = \{-2, -1, 0, 1, 3, \pi, 8, 10\}$ su codominio tal que $f(-3) = 0,\ f(-1) = 8,\ f(0) = \pi,\ f(2) = 8,\ f(4) = 3,\ f(7) = 1$. Representar mediante un diagrama de flechas y efectuar el gráfico de f en un sistema de ejes cartesianos.

   Solución:





2. Se considera $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2-2x}$, calcular $g(-1)$, $g(3)$ y $g(-\pi)$.
   Solución:

- $g(-1) = \dfrac{(2(-1)+1)^2}{(-1)^2 - 2(-1)} = \dfrac{(-1)^2}{1+2} = \dfrac{1}{3}$.
- $g(3) = \dfrac{49}{3}$
- $g(-\pi) = \dfrac{4\pi^2 - 4\pi + 1}{\pi^2 + 2\pi}$.

Ejercicio 4.2
Hallar el dominio más amplio posible de las siguientes funciones reales:

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

2. $g(x) = \ln\left(\frac{x^2-4}{x}\right)$.

3. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x+1}$.

Solución: 1. Para que la raíz cuadrada exista en los reales debe ser $2x-1 \geq 0$, esto se cumple sólo si $x \geq \dfrac{1}{2}$, como el denominador debe ser distinto de cero, $x \neq \dfrac{1}{2}$. Así que el dominio de f es el intervalo abierto $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

2. Para que exista el logaritmo el argumento debe ser positivo, es decir $\dfrac{x^2-4}{x} > 0$. Haciendo un análisis de signo se obtiene que $\dfrac{x^2-4}{x} > 0$ si y sólo si $-2 < x < 0$ o $x > 2$, es decir que el dominio de g es la unión disjunta de dos intervalos abiertos: $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

3. En este caso deben cumplirse las siguietes dos condiciones:

$$x - 1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 2x + 1 \neq 0.$$

Como $x^2-2x+1 = (x-1)^2$, su única raíz es 1. Combinado con la primer condición se obtiene que $x > 1$. Por lo tanto el dominio de h es el intervalo abierto $(1, +\infty)$.

Ejercicio 4.3
Analizar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

1. $f\colon [0, +\infty) \to [-2, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 2$.

2. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 3x + 2$. ¿Se puede cambiar el dominio de g (sin cambiar el codominio) para que sea biyectiva?

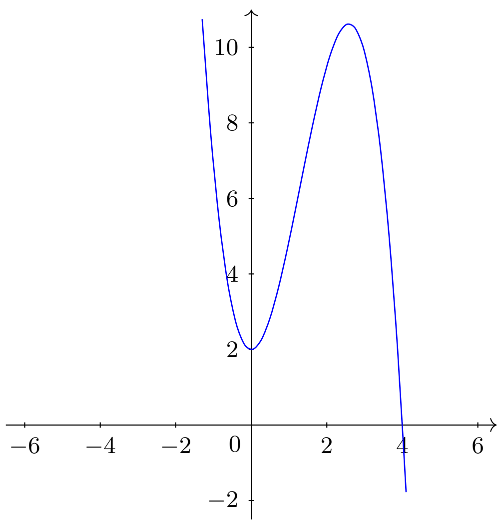
Solución: 1. Inyectividad: Si $x \geq 0$ e $y \geq 0$ son distintos, entonces $x^2 \neq y^2$, por lo que $x^2 - 2 \neq y^2 - 2$, así que f es inyectiva. Otra forma de hacerlo es viendo el signo de la derivada

de f, como $f'(x) = 2x > 0$ para todo $x > 0$ se tiene que f es estrictamente creciente en el intervalo $[0, +\infty)$.
Sobreyectividad: Como f es estrictamete creciente en el intervalo $[0, +\infty)$ y no está acotada superiormente, se tiene que su imagen es $[f(0), +\infty) = [-2, +\infty)$ porque $f(0) = -2$ y f es continua. Por lo tanto f es sobreyectiva.
Se concluye que es biyectiva.

2. Inyectividad: Se observa que g tiene dos raíces distintas en $\mathbb{R}$, $g(-2) = g(1) = 0$, por lo que no es inyectiva. También se puede ver que la derivada $g'(x) = 3x^2 - 3$ tiene un cambio de signo.
Sobreyectividad: Como g es continua y $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, g es sobreyectiva.
Como g no es inyectiva, no es biyectiva.
Si tomamos como dominio de g el conjunto $I = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$, la función $g\colon I \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^3 - 3x + 2$ es biyectiva. (No son los únicos intervalos que se pueden considerar).

Ejercicio 4.4

Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfico se representa en la siguiente figura:

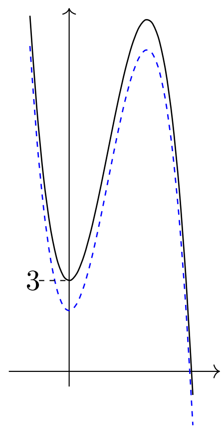


Sin encontrar la expresión de f, hallar el gráfico de las siguientes funciones:

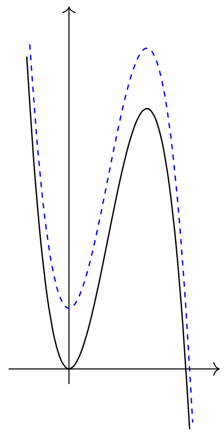
1. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) + 1$.
2. $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = f(x) - 2$.
3. $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = f(x + 1)$.
4. $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = f(x - 1)$.
5. $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $m(x) = f(-x)$.
6. $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -f(x)$.
7. $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = -f(-x)$.
8. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 2f(x)$.

Solución:

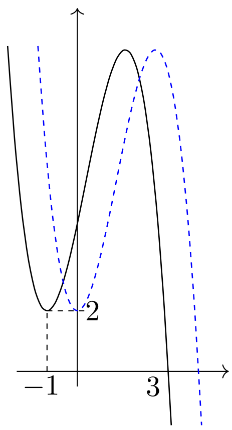
1.$f(x)+1$:



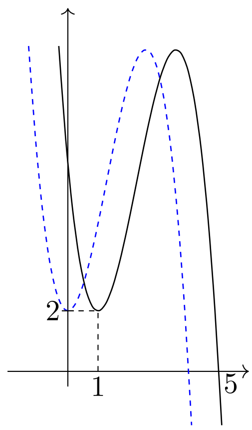
2.$f(x)-2$:



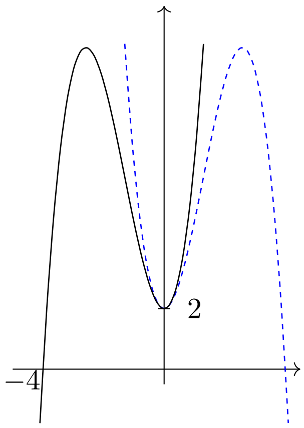
3.$f(x+1)$:



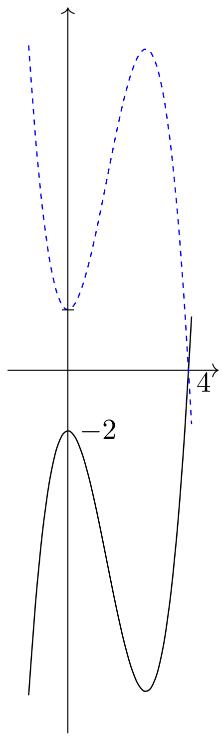
4.$f(x-1)$:



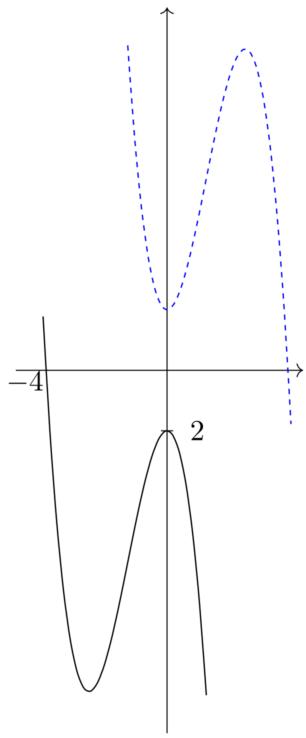
5.$f(-x)$:



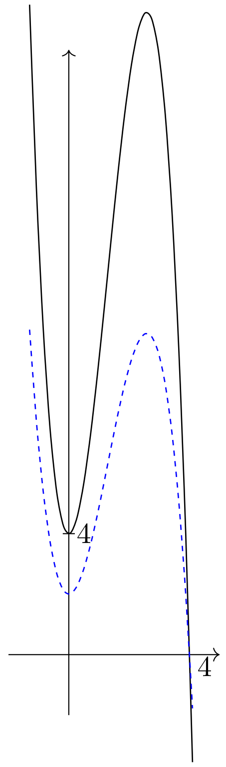
6.$-f(x)$:



7. $-f(-x)$:



8. $2f(x)$:



Ejercicio 4.5

Graficar las siguientes funciones:

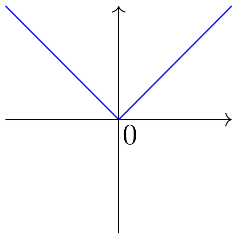
1. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

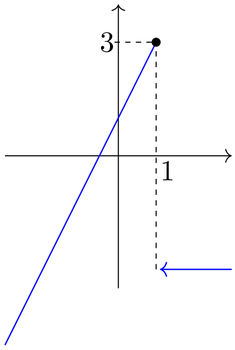
2. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

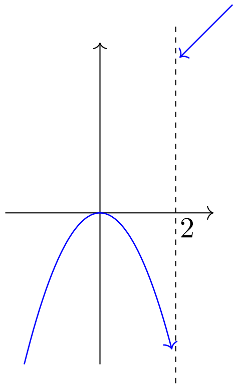
3. $j : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

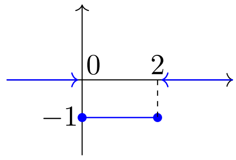
4. $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} & \end{cases}$

Solución:

1. 

2. 

3. 

4. 

Ejercicio 4.6

Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$, $g \circ f$ y $f + g$.

1. $f(x) = 2x + 1$, $\quad g(x) = x^3 - x^2 - 4$
2. $f(x) = |2x + 1|$, $\quad g(x) = x^2 + x + 1$

Solución:

1.

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3 - x^2 - 4) = 2(x^3 - x^2 - 4) + 1 = 2x^3 - 2x^2 - 7$,
- $(g \circ f)(x) = (2x + 1)^3 - (2x + 1)^2 - 4 = 8x^3 + 8x^2 + 2x - 4$,
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$.

2.

- $(f \circ g)(x) = |2x^2 + 2x + 3| = 2x^2 + 2x + 3$,
- $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 2 + |2x + 1| = \begin{cases} 4x^2 + 2x + 1, & \text{si } x \leq -\frac{1}{2}, \\ 4x^2 + 6x + 3, & \text{si } x \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$
- $(f + g)(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{si } x \leq -\frac{1}{2}, \\ x^2 + 3x + 2, & \text{si } x \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Ejercicio 4.7

Se consideran la funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ y $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Calcular $f \circ g$ y $f + g$. ¿Cuál es su dominio? ¿Es posible calcular $g \circ f$? ¿Cuál es el dominio más amplio posible de $g \circ f$?.

Solución:

- $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x} + 3 = \frac{1+3x}{x}$. Como la función g no está definida en 0, tammpoco lo está la composición $f \circ g$, su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $(f + g)(x) = \frac{1}{x} + x + 3 = \frac{1+x^2+3x}{x}$, su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Al momento de calcular $g \circ f$, se obtiene $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x+3}$. Por lo que su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Observar que el dominio no es el mismo que el de f.

Ejercicio 4.8
Escribir los siguientes enunciados en lenguaje matemático:

- f es una función de dominio y codominio el conjunto de los reales, tal que para todo elemento real entre -1 y 1, se tiene que su imagen funcional está entre 0 y 1".
Solución: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \in [0, 1]\ \forall\ x \in [-1, 1]$.
- f es una función de dominio $A \subset \mathbb{R}$ y codominio $B \subset \mathbb{R}$, tal que para todo elemento del codominio existe una preimagen en el dominio.
Solución: $f\colon A \to B$, donde $A, B \subset \mathbb{R}$, tal que $\forall\ b \in B$, $\exists\ a \in A$ que verifica $f(a) = b$ (es decir que f es *sobreyectiva*).
- f es una función de dominio y codomino reales que tiene máximo y mínimo.
Solución: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\exists\ x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ que verifican $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
- f es una función de dominio $A \subset \mathbb{R}$ y codominio $B \subset \mathbb{R}$ que tiene dos raíces.
Solución: $f\colon A \to B$, donde $A, B \subset \mathbb{R}$, tal que $\exists\ x_0, x_1 \in A$ con $x_0 \neq x_1$ que verifican $f(x_0) = f(x_1) = 0$ y $f(x) \neq 0\ \forall\ x \in A \setminus \{x_0, x_1\}$.

5. Funciones: límites y continuidad

5.1. Límites

Ejercicio 5.1
Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4-2x^3}{x^3-x^2}$
4. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$
5. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$
6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

7. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$

8. $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$

9. $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución:

1.
$$\lim_{x\to 1} x^4+x^3+x^2+x+1=5$$

2.
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-2}=-2$$

3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4-2x^3}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 0} \frac{x^3(x-2)}{x^2(x-1)}=\lim_{x\to 0} \frac{x(x-2)}{(x-1)}=0$$

4.
$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a} x+a=2a$$

5. Dado que
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3}=1$$
y
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3}=-1$$
tenemos que $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ no existe.

6.
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

7.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}&=\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+x}\\&=\lim_{x\to 1} \frac{x-x^2}{(x-1)(\sqrt{x}+x)}\\&=\lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+x)}\\&=\lim_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt{x}+x}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}&=\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+a^{n-1})}{x-a}\\&=\lim_{x\to a} x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+a^{n-1}\\&=na^{n-1}\end{aligned}$$

9. Dado que
$$-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$$
tenemos que
$$-x \leq x\sin(\frac{1}{x}) \leq x$$
y por lo tanto
$$\lim_{x\to 0} -x \leq \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x$$
Luego,
$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ejercicio 5.2

Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+3-(2(x+5)+3)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{(2(x+5)+3)}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^5-x^4+3x^3-2}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

Solución:

1.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} 2x+3-(2(x+5)+3) &= \lim_{x\to+\infty} 2x+3-2(x+5)-3\\ &= \lim_{x\to+\infty} 2x+3-2x-10-3\\ &= \lim_{x\to+\infty} -10 = -10.\end{aligned}$$

2.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{(2(x+5)+3)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{2x+13} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{2+\frac{13}{x}} = 1$$

3.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1} = 1$$

4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+x-1} &= \lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+x-1})\frac{x+\sqrt{x^2+x-1}}{x+\sqrt{x^2+x-1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+x-1)}{x+\sqrt{x^2+x-1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x+\sqrt{x^2+x-1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

5.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=+\infty$$

6.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^5-x^4+3x^3-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{x^3-x^2+3x-\frac{2}{x^2}}=0$$

7. Usando la regla de l'Hopital, tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

8. Usando la regla de l'Hopital, tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

5.2. Continuidad

Ejercicio 5.3

Determinar qué condiciones deben cumplir $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función f sea continua:

1. $f(x)=\begin{cases}x^2+3x+2 & \text{si } x\le 1\\ ax^2+1 & \text{si } x>1\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1) & \text{si } x>0\\ (x+a)^2 & \text{si } x\le 0\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x) & \text{si } x<1\\ ax+b & \text{si } 1\le x\le 2\\ x^2 & \text{si } x>2\end{cases}$

Solución:

1. Si $x \neq 1$, la función es continua ya que está dada por polinomios. Para que la función sea continua en $x=1$ se debe verificar

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

Luego, como tenemos que

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2+3x+2 = 6$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax^2+1 = a+1$
- $f(1) = 6$

resulta que f es continua en $x = 1$ si $a = 5$.

2. Si $x \neq 0$, la función es continua por ser composición de funciones continuas. Para que la función sea continua en $x = 0$ se debe verificar

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Luego, como tenemos que

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+a)^2 = a^2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$
- $f(0) = a^2$

resulta que f es continua en $x = 0$ si $a^2 = 0$, es decir si $a = 0$.

3. Si $x \neq 1$ y $x \neq 2$, la función es continua por ser composición de funciones continuas. Para que la función sea continua en $x = 1$ se debe verificar

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

Luego, como tenemos que

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sin(\pi x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax+b = a+b$
- $f(1) = a+b$

resulta que f es continua en $x = 1$ si $a+b = 0$. Para que la función sea continua en $x = 2$ se debe verificar

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

Luego, como tenemos que

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} ax+b = 2a+b$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 = 4$
- $f(2) = 4$

resulta que f es continua en $x = 2$ si $2a+b = 4$. Por lo tanto, f es continua si $a+b = 0$ y $2a+b = 4$, es decir, si $a = 4$ y $b = -4$.

5.3. Derivadas

Ejercicio 5.4

Calcular la derivada de las siguientes funciones cuya expresión es:

1. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 5x + 7$
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$
3. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$
4. $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1}$
5. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$
6. $f(x) = x\ln(x) - x$
7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
8. $f(x) = \left(\sqrt[5]{x+1}\right)^2$
9. $f(x) = \sin^3(x)$
10. $f(x) = \sin\left(x^3\right)$
11. $f(x) = \sin(\cos(x))$
12. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

Solución:

1. $$f'(x) = 4x^3 - 6x - 5$$

2. Reescribimos f como $f(x) = x^{-1} + 2x^{-2} + 3x^{-3}$ y obtenemos
$$f'(x) = -x^{-2} - 4x^{-3} - 9x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$$

3. $$f'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad - cb}{(cx+d)^2}$$

4. $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+3)(x^4+x^2+1) - (x^2+3x+2)(4x^3+2x)}{(x^4+x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x^5 - 9x^4 - 8x^3 - 3x^2 - 2x + 3}{(x^4+x^2+1)^2} \end{aligned}$$

5. $$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$$

6. $$f'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 = \ln(x)$$

7. $$f'(x) = \frac{\sqrt{4-x^2} - (-\frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}})x}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2} = \frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

8. Reescribimos f como $f(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^{\frac{2}{5}}$ y obtenemos

$$f'(x) = \frac{5}{2}(x+1)^{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2\left(\sqrt[5]{x+1}\right)^3}$$

9. $$f'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$$

10. $$f(x) = 3x^2\cos\left(x^3\right)$$

11. $$f'(x) = \cos(\cos(x))(-\sin(x))$$

12. $$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}\left(-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)$$

Ejercicio 5.5

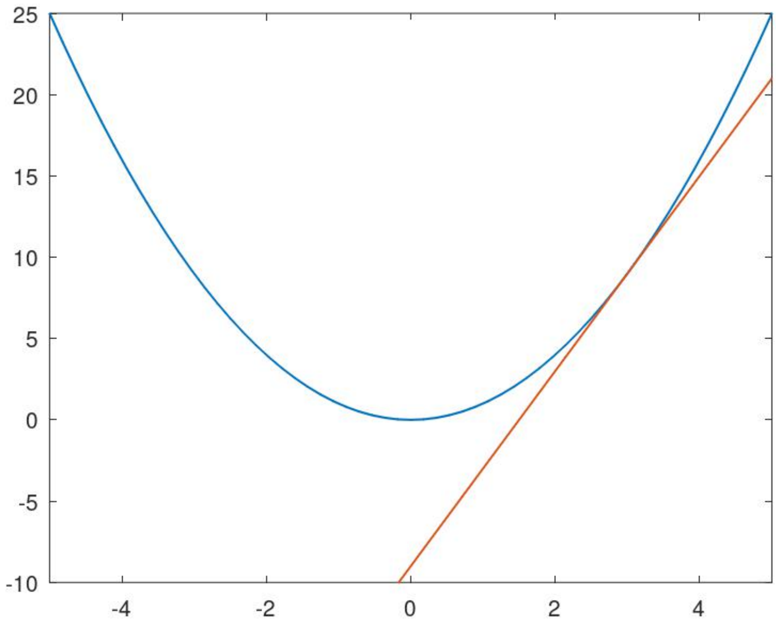
En cada uno de los siguientes casos, calcular y graficar la recta tangente de la función f en el punto p

1. $f(x) = x^2$, $p = (3, 9)$
2. $\cos(x)$, $p = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
3. $\frac{x}{x^2+1}$, $p = (0, 0)$
4. $f(x) = \sqrt{9+x^2}$, $p = (4, 5)$

Solución:

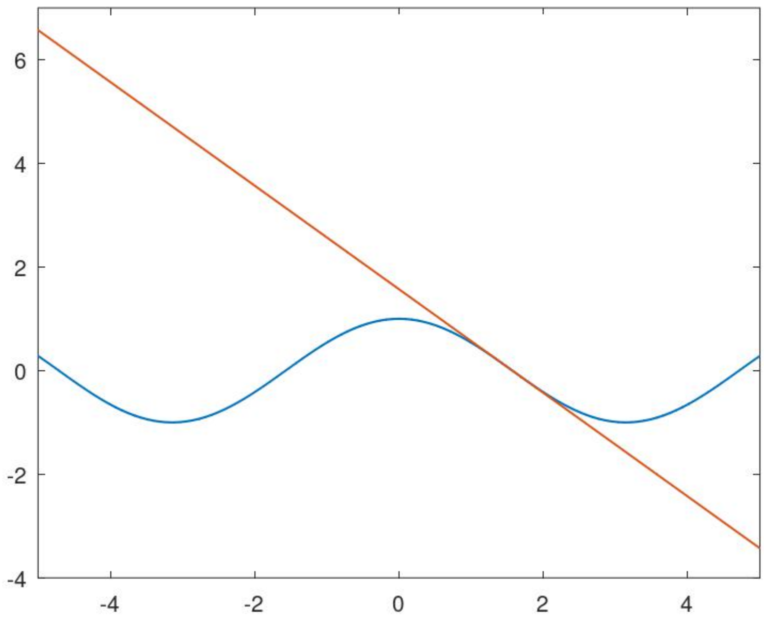
1. Dado que $f'(x) = 2x$, tenemos que $f'(3) = 6$. Por lo tanto, la recta tangente a f por el punto p tiene la forma $y = 6x + b$. Como la recta tangente pasa por el punto p, tenemos que $9 = 6 \times 3 + b$. Por lo tanto, $b = -9$ y la recta tangente es:

$$y = 6x - 9$$



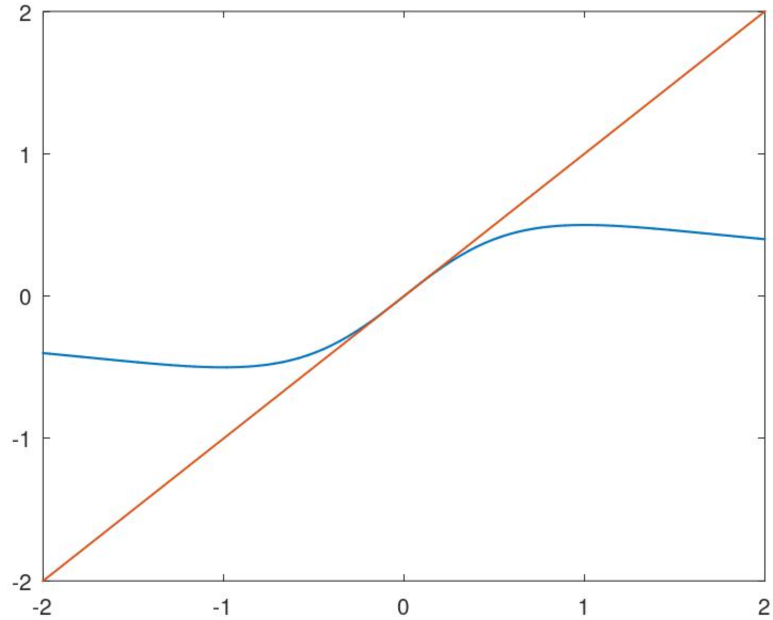
2. Dado que $f'(x) = -\sin(x)$, tenemos que $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$. Por lo tanto, la recta tangente a f por el punto p tiene la forma $y = -x + b$. Como la recta tangente pasa por el punto p, tenemos que $0 = -\frac{\pi}{2} + b$. Por lo tanto, $b = \frac{\pi}{2}$ y la recta tangente es:

$$y = -x + \frac{\pi}{2}$$



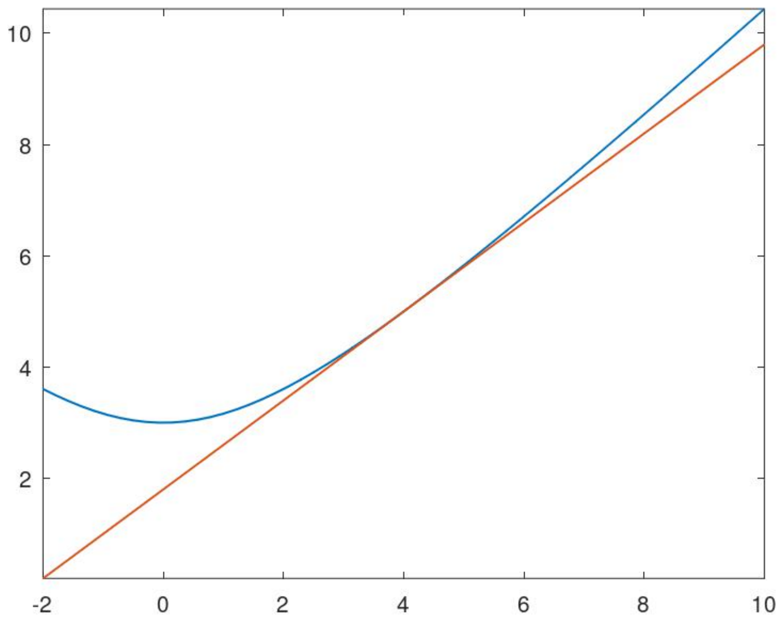
3. Dado que $f'(x) = \frac{x^2+1+x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+1}{(x^2+1)^2}$, tenemos que $f'(0) = 1$. Por lo tanto, la recta tangente a f por el punto p tiene la forma $y = x + b$. Como la recta tangente pasa por el punto p, tenemos que $0 = 0 + b$. Por lo tanto, $b = 0$ y la recta tangente es:

$$y = x$$



4. Dado que $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$, tenemos que $f'(4) = \frac{4}{5}$. Por lo tanto, la recta tangente a f por el punto p tiene la forma $y = \frac{4}{5}x + b$. Como la recta tangente pasa por el punto p, tenemos que $5 = \frac{4}{5} \times 4 + b$. Por lo tanto, $b = \frac{9}{5}$ y la recta tangente es:

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{9}{5}$$



Ejercicio 5.6

Sean f y g dos funciones reales de las que se sabe que: $f(2) = 1$, $g(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $g'(2) = 3$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando.

1. $(f+g)'(2) = 2$
2. $(f.g)'(2) = 3$
3. g es continua en $x = 2$
4. siendo $h : h(x) = x + f(x)$, se cumple que $h'(2) = 0$

Solución

1. Verdadero:
$$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = -1 + 3 = 2$$
2. Falso:
$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = -3 + 3 = 0$$
3. Verdadero: g es continua en $x = 2$ ya que es derivable en $x = 2$
4. Verdadero: Dado que $h'(x) = 1 + f'(x)$, se tiene que
$$h'(2) = 1 - f'(1) = 1 - 1 = 0$$

6. Trigonometría

Ejercicio 6.1

Usando el círculo trigonométrico completar la tabla.

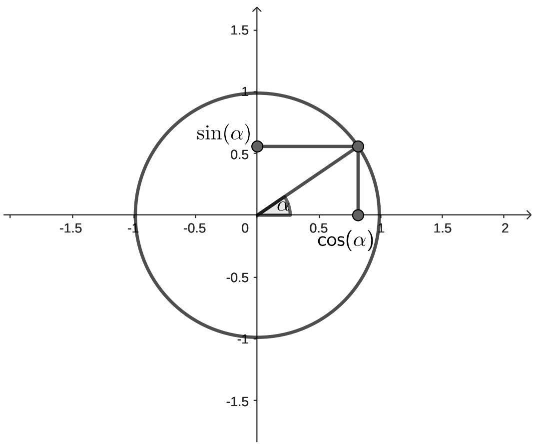


Figura 1: Círculo trigonométrico.

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	1	0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	–
π	-1	0	0
$4\pi/3$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$7\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}/3$
$3\pi/2$	0	-1	–
$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1

Ejercicio 6.2

Sea $0 < \theta < \pi/2$. Usando el círculo trigonométrico calcular en función de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ el seno y coseno de los siguientes ángulos:

1. $\frac{\pi}{2} - \theta$
2. $\frac{\pi}{2} + \theta$
3. $\pi + \theta$
4. $\pi - \theta$
5. $\frac{3\pi}{2} + \theta$
6. $\frac{3\pi}{2} - \theta$

Solución:

1. $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$ y $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$
2. $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos(\theta)$ y $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin(\theta)$
3. $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$ y $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$
4. $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$ y $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$
5. $\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos(\theta)$ y $\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin(\theta)$

6. $\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\cos(\theta)$ y $\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin(\theta)$

Ejercicio 6.3

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2. $\text{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = 0$
3. $\cos^2(x) = 1$
4. $\tan(x) = -1.$

1. Si $\cos(x) = \frac{1}{2}$ entonces $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. En conclusión, el conjunto solución es
$$Sol = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
2. Por la parte anterior sabemos que $\text{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) = 0$ y esto implica que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. En conclusión,
$$Sol = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
3. Si $\cos^2(x) = 1$ entonces $\cos(x) = 1$ o $\cos(x) = -1$. En el primer caso $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ y en el segundo $x = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. En conclusión, el conjunto solución es
$$Sol = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$
4. Si $\tan(x) = -1$ entonces $\sin(x) = -\cos(x)$ lo que implica que $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ o $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ y el conjunto solución es
$$Sol = \{\frac{3\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

7. Aplicaciones

Ejercicio 7.1

Juan decide comprarse un celular nuevo, luego de ver distintos modelos selecciona su favorito. Dos casas de telefonía, Alfa y Bravo venden ese celular a $U\$S$ 900.

La casa Alfa al entrar en su semana aniversario decide hacer un descuento del 20 %. Sin embargo la casa Bravo decide no quedarse atrás y realiza un descuento del 40 %. Para no perder clientela Alfa decide realizar un nuevo descuento del 20 %.

¿Donde debería comprar Juan su celular?

Solución: En la casa Bravo el precio del celular será se $0,60(900) = 540$ pesos mientras que en la casa Alfa será $(0,8)^2(900) = 576$ así es debería comprarlo en la casa Bravo.

Ejercicio 7.2

Si usted es un mayorista que compra un producto en \$20, ¿a cuánto deberá venderlo para obtener una ganancia del 15 % de su precio de venta?

Solución: Si se vende el producto a un precio $20 + x$ entonces el 15 % del precio de venta será $(0,15)(20 + x)$ y esto debe ser igual a la ganancia que es x por lo tanto $3 = 0,85x$ y concluimos que $x = 3,53$ aproximadamente por lo tanto el precio de venta será de $23,53$ aproximadamente.

Ejercicio 7.3

Un Shopping decide quitar el IVA a todos sus productos, realizando un descuento del 18.03 %. Sin embargo el impuesto IVA aumenta en un 23 % el costo del producto. ¿Es esta una publicidad engañosa?

Solución: La publicidad no es engañosa ya que si el costo del producto es x, su precio de venta incluyendo el IVA será de $(1,23)x$. Luego, al realizar el 18,03 % de descuento obtenemos $(0,8197)(1,23)x$ que es aproximadamente x.