Criterios de calidad de medición

ANTIGUOS →

- "cálculo de errores"
- Enfoque estadístico

No consideran simultáneamente errores aleatorios y sistemáticos

---

ACTUAL Estimación de incertidumbre de medición

“cálculo de errores”

- El viejo concepto de error NO coincide con el moderno
- Si bien se “propagan” en forma similar a la incertidumbre estándar, NO puede asimilarse esta última al “error”
- Al no existir un criterio estadístico para fijar el error “máximo”, luego de la propagación se obtienen estimaciones de error “máximo” por lo general no realistas (muy grandes)

$$"y = f\left(x_1, \ldots x_n\right)"$$

$$"\Delta y \approx \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_k} \Delta x_k "$$

Enfoque estadístico

Solo tiene en cuenta la dispersión de los resultados de repeticiones, ya sea en condiciones de repetibilidad o de reproducibilidad (o de precisión intermedia, según el conjunto de definiciones utilizadas), mediante intervalos de *confianza*

$$\overline{x} \pm \mathrm{t}_{\left(1+p\right)/2}\left(\nu\right)\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \nu = n - 1$$

Estimación de la incertidumbre de medición

- UN parámetro de calidad de medición
- Permite comparar la calidad de distintas mediciones
- Determina intervalos de *cobertura* de amplitudes “realistas” (como las califica la GUM)
- Útil en reglas de decisión (por ejemplo, de determinación de la conformidad) considerando riesgos.

Magnitud	Longitud de la varilla a 30 º C
Valor de la magnitud	L
Estimador	X
Estimación	x

PÉRDIDAS Y RIESGOS

L *función de pérdida*

R *función de riesgo*

a *acción adoptada*

θ *estado del sistema*

d *estrategia o función de decisión*

$$\forall\theta \in \Theta\ \forall a \in \mathcal{A}\ L\left(\theta, a\right) \geq 0$$
$$\forall\theta \in \Theta\ \exists a \in \mathcal{A}\ L\left(\theta, a\right) = 0$$

$$"R\left(\theta, d\right) = \mathbb{E}L\left(\theta, a\right)"$$

Intervalos de confianza y de cobertura

$$\theta \in i \Rightarrow L\left(\theta, i\right) = 0$$

Intervalo *I* de *confianza* al 100*p*%

$$P_\theta\left(\theta \underset{\cdot}{\in} I\right) = p$$

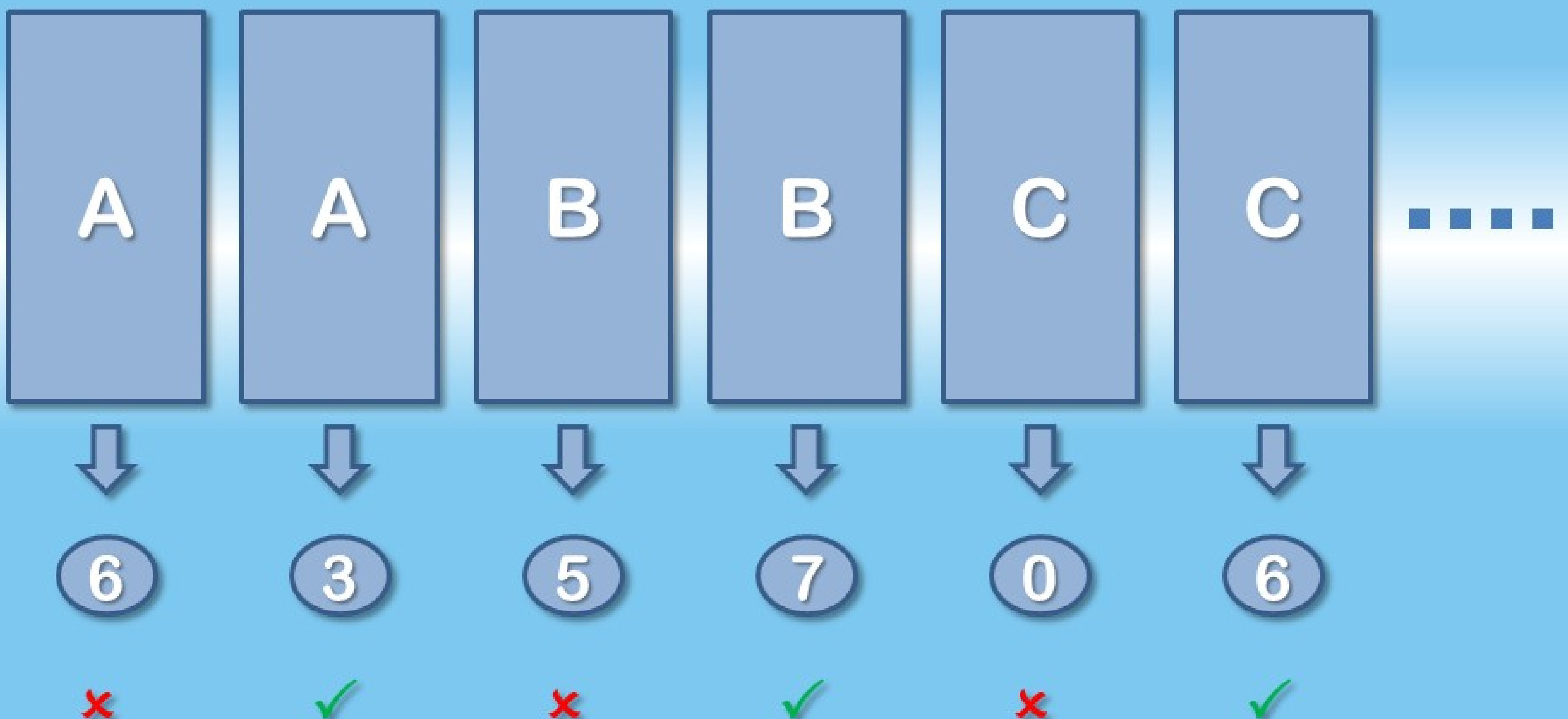
Intervalo *I* de *cobertura* al 100*p*%

$$Q_x\left(i\right) = p$$

$$Estados: \quad \Theta = \{A, B, C\} = \{0.01, 0.02, 0.03\}$$

$$Acciones: \quad \mathcal{A} = \{b, m\} \quad (\text{"buenas" y "malas"})$$

$$N = 100\,000 \quad n = 500 \quad c = 5$$



$$L(\theta, a)$$

$a \backslash \theta$	A	B	C
b	0	1	1.5
m	0.5	0	0

$$P_\theta(d = a)$$

$a \backslash \theta$	A	B	C
b	0.616	0.065	0.002
m	0.384	0.935	0.998

Muestreo sin reposición, por lo tanto se utiliza la distribución hipergeométrica

$$\forall \theta \in \Theta \; P_\theta\left(d=b\right)=\frac{\sum_{k=0}^{5}\binom{100000\theta}{k}\binom{100000\left(1-\theta\right)}{5-k}}{\binom{100000}{500}}$$

RIESGOS

$$\boxed{\forall \theta \in \Theta \; R(\theta, d) = L(\theta, b) P_{\theta}(d = b) + L(\theta, m) P_{\theta}(d = m)}$$

$$R(A, d) \doteq 0(0.616) + 0.5(0.384) \doteq 0.192$$
$$R(B, d) \doteq 1(0.065) + 0(0.935) \doteq 0.065$$
$$R(C, d) \doteq 1.5(0.002) + 0(0.998) \doteq 0.004$$

RIESGO BAYESIANO

$$Q \quad \textit{distribución de estados}$$

$$q \quad \textit{densidad de estados}$$

$$q\left(A\right)=0.95\wedge q\left(B\right)=0.03\wedge q\left(C\right)=0.02$$

$$R\left(Q,d\right)=q\left(A\right)R\left(A,d\right)+q\left(B\right)R\left(B,d\right)+q\left(C\right)R\left(C,d\right)$$

$$\boxed{R\left(Q,d\right)=\sum_{\theta\in\Theta}R\left(\theta,d\right)q\left(\theta\right)}$$

$$\boxed{R\left(Q,d\right)=\int_{\Theta}R\left(\theta,d\right)q\left(\theta\right)\mathrm{d}\,\theta}$$

$$\boxed{R\left(Q,d\right)=\int_{\Theta}R\left(\theta,d\right)Q\left(\mathrm{d}\,\theta\right)=\int_{\Theta}R\left(\theta,d\right)q\left(\theta\right)\mu\left(\mathrm{d}\,\theta\right)}$$

REGLAS BAYESIANAS

- Son las reglas *d* que minimizan el *riesgo bayesiano* $R(Q, d)$, si existen
- Bajo condiciones generales, equivale a hallar las *acciones bayesianas* para la distribución final Q_x

Pérdida bayesiana: $L\left(Q,a\right) = \int L\left(\theta,a\right) Q\left(\mathrm{d}\,\theta\right)$

("media de las $L\left(\theta,a\right)$ con respecto a todas las θ dejando fija a")

Acciones bayesianas con respecto a Q_x : si existen, las a que minimizan $L\left(Q_x,a\right)$ (dependen de x)

$$k(\theta) > 0$$

$$L(\theta, x) = k(\theta)\left(g(\theta) - x\right)^2 \Rightarrow$$

$$R(\theta, X) = k(\theta)\mathbb{E}_\theta\left(X - g(\theta)\right)^2 = k(\theta)\left(\left(g(\theta) - \mathbb{E}_\theta X\right)^2 + \mathbb{V}_\theta X\right)$$

Pérdida de error cuadrático:

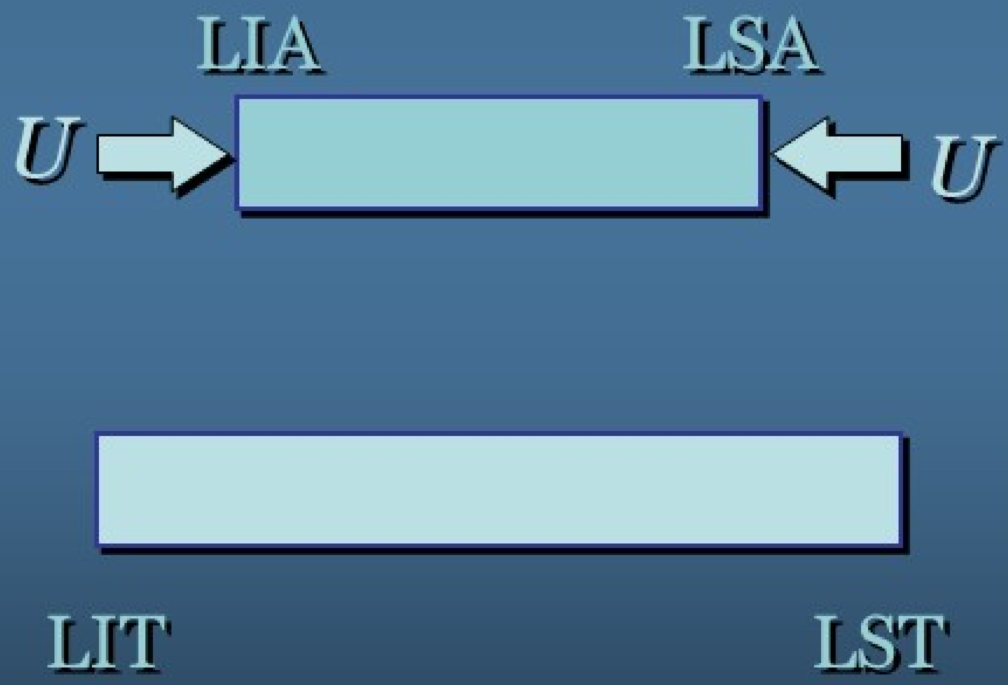
$$L(\theta, x) = (\theta - x)^2$$

Riesgo: error cuadrático medio:

$$R(\theta, X) = \mathbb{E}_\theta\left(X - \theta\right)^2 = \left(\theta - \mathbb{E}_\theta X\right)^2 + \mathbb{V}_\theta X$$

“BAJA” PROB.

FALSA CONF.



“BAJA” PROB.

FALSA **NO** CONF.

ENFOQUES

CLÁSICO

FRECUENCISTA

BAYESIANO

TEORÍA AXIOMÁTICA

ENFOQUES COMPLEMENTARIOS

(NO EXCLUYENTES)

ENFOQUE BAYESIANO

PROBABILIDAD DE UN SUCESO
≈
GRADO DE CREENCIA, CONFIANZA O FACTIBILIDAD

Toda la “información” necesaria para tomar decisiones se encuentra contenida en la distribución final Q_x

MODELO

$$P = \left(P_\theta\right)_{\theta \in \Theta}$$

DISTRIB. INICIAL

$$Q$$

ACTUALIZACIÓN

DISTRIB. FINAL

$$Q_x$$

$$x$$

VAL. OBSERVACIÓN

REGLA DE BAYES

$$\text{"los } E\text{' s cubren } A\text{"}$$

$$\text{"Los } E\text{'s son disjuntos dos a dos"}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
P(E_1 \mid A) &= \frac{P(A \mid E_1)P(E_1)}{P(A)} = \frac{P(A \mid E_1)P(E_1)}{P(A \mid E_1)P(E_1) + P(A \mid E_2)P(E_2) + \cdots} \\
P(E_2 \mid A) &= \frac{P(A \mid E_2)P(E_2)}{P(A)} = \frac{P(A \mid E_2)P(E_2)}{P(A \mid E_1)P(E_1) + P(A \mid E_2)P(E_2) + \cdots} \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}}$$

θ *estado del sistema*

x *resultados experimentales*

p_θ *densidad de los resultados cuando el estado es* θ

q *densidad inicial de los estados*

q_x *densidad final de los estados*

$$\forall\theta\in\Theta\ \forall x\in\mathcal{X}\ \ q_x\left(\theta\right)=\frac{p_\theta\left(x\right)q\left(\theta\right)}{\int p_t\left(x\right)q\left(t\right)\mu\left(\mathrm{d}\,t\right)}=\frac{p_\theta\left(x\right)q\left(\theta\right)}{\int p_t\left(x\right)Q\left(\mathrm{d}\,t\right)}$$

$$\forall\theta\in\Theta\ \forall x\in\mathcal{X}\ \ q_x\left(\theta\right)=\frac{p_\theta\left(x\right)q\left(\theta\right)}{\int_\Theta p_t\left(x\right)q\left(t\right)\mathrm{d}\,t}\qquad\forall\theta\in\Theta\ \forall x\in\mathcal{X}\ \ q_x\left(\theta\right)=\frac{p_\theta\left(x\right)q\left(\theta\right)}{\sum_{t\in\Theta}p_t\left(x\right)q\left(t\right)}$$

EJEMPLO

DISTRIBUCIÓN INICIAL

$$\boxed{Q_0 = \mathrm{Beta}\left(A, B-A\right)}$$

ACTUALIZACIÓN

DISTRIBUCIÓN FINAL

$$\boxed{Q_1 = \mathrm{Beta}\left(A+S_n, B-A+n-S_n\right)}$$

$$0 < A < B$$

$$\boxed{s_0 = G\left(Q_0\right) = \frac{A}{B}}$$

$$\boxed{s_1 = G\left(Q_1\right) = \frac{A+S_n}{B+n}}$$

OBSERVACIÓN

$$s_1 = \frac{A + S_n}{B + n} = \frac{\dfrac{A}{n} + \dfrac{S_n}{n}}{\dfrac{B}{n} + 1}$$

$$s_1 \cong \frac{S_n}{n} = \hat{S} \text{ (para } n \text{ "grande")}$$

EJEMPLO

BOL 1	BOL 2	BOL 3
995B 5A	95B 5A	5A

A

SE ELIGE AL AZAR UN BOLILLERO
Y
DE ÉL SE EXTRAE UNA BOLILLA

A: SALIÓ BOL. AZUL
B_1: BOL. 1 ELEGIDO
B_2: BOL. 2 ELEGIDO
B_3: BOL. 3 ELEGIDO

PROBLEMA

SABIENDO QUE LA BOL. ES AZUL
¿PROB. DE QUE PROVENGA DE
CADA BOLILLERO?

EJEMPLO (CONT.)

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A)} =$$

$$\frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3)} \doteq 0.005$$

$$\text{Idem: } P(B_2 \mid A) = \frac{P(A \mid B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{100}\frac{1}{3}}{\frac{1055}{3000}} = \frac{50}{1055} \doteq 0.05$$

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \mid B_3)P(B_3)}{P(A)} = \frac{1\frac{1}{3}}{\frac{1055}{3000}} = \frac{1000}{1055} \doteq 0.95$$

INTERPRETACIÓN BAYESIANA

- valor muy bajo de $P(B_1 \mid A)$ debido a la baja proporción de bolillas azules en el bolillero 1

- $P(B_3)$: prob. **inicial** elegir bol. 3;
  $P(B_3 \mid A)$: prob. **final** elegir bol. 3

INTERPRETACIÓN BAYESIANA (CONTINUACIÓN)

La evidencia experimental (la información acerca de la ocurrencia de A, es decir, el conocimiento de que la bolilla extraída es azul), modifica el grado de creencia en que el bolillero 3 sea el elegido (el grado de creencia inicial es $P(B_3) \doteq 0.33$*, y el final es* $P(B_3 \mid A) \doteq 0.95$*)*

ESQUEMÁTICAMENTE

$$P(B_1) = \frac{1}{3} \doteq 0.33$$

$$P(B_2) = \frac{1}{3} \doteq 0.33$$

$$P(B_3) = \frac{1}{3} \doteq 0.33$$

ACTUALIZACIÓN

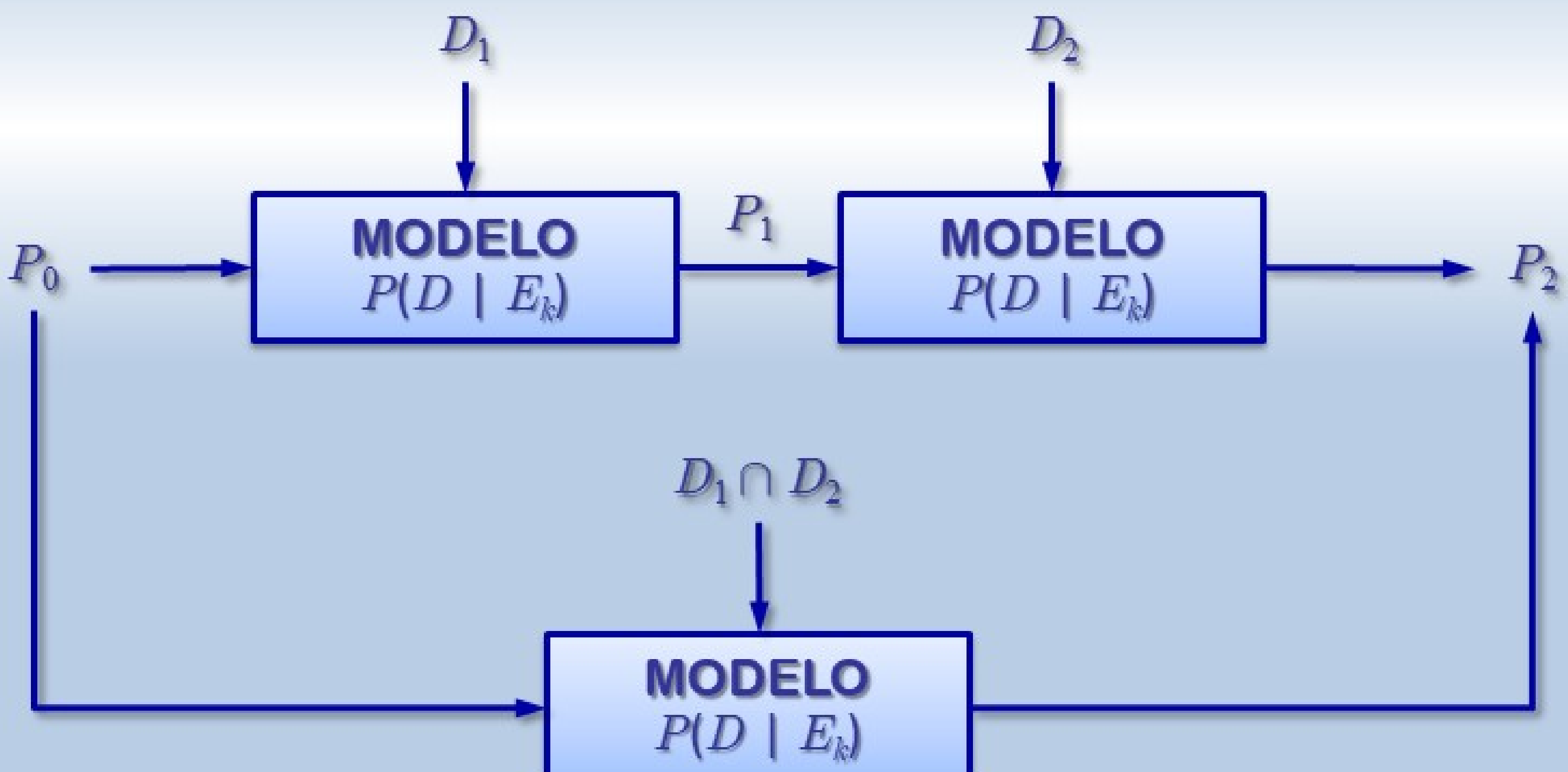
$$P(B_1 \mid A) \doteq 0.005$$

$$P(B_2 \mid A) \doteq 0.05$$

$$P(B_3 \mid A) \doteq 0.95$$

FORMAS EQUIVALENTES DE ACTUALIZACIÓN BAYESIANA

$$P_1 = P_0\left(\cdot \mid D_1\right) \quad P_2 = P_1\left(\cdot \mid D_2\right) = P_0\left(\cdot \mid D_1 \cap D_2\right)$$



DISTRIBUCIONES CON MÁXIMA ENTROPÍA

$$\textit{Entropía: } S = -\int f \ln f \, \mathrm{d}\,\mu$$

$$\textit{Restricción general: } \int E f \, \mathrm{d}\,\mu = c$$

RESTRICCIÓN	*DISTRIBUCIÓN*
$\forall x \notin [a;b] \; f(x) = 0$	$\mathrm{U}(a;b)$
$\forall x < 0 \; f(x) = 0$	$\mathrm{Ex}(\lambda)$
$\mathbb{E}X = \mu \wedge \mathbb{V}X = \mathbf{V} > 0$	$\mathrm{N}(\mu, \mathbf{V})$

INCONSISTENCIAS AL ASIGNAR DISTRIBUCIONES DE MÁXIMA ENTROPÍA

$$X \sim \mathrm{U}\left(0,1\right) \wedge \alpha > 1 \Rightarrow X^{\alpha} \nsim \mathrm{U}\left(0,1\right)$$

DISTRIBUCIÓN UNIFORME O RECTANGULAR

$$X \sim \mathrm{U}(a,b) \quad a,b \in \mathbb{R} \quad a < b$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin (a;b) \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in (a;b) \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a;b] \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

(CONT.)

$$\mathbb{E}X=\frac{a+b}{2}\quad \mathbb{V}X=\frac{(b-a)^2}{12}$$

caso particular :

$$X\sim \mathrm{Un}(-a,a)\Rightarrow\left(\mathbb{E}(X)=0\wedge\mathbb{V}(X)=\frac{a^2}{3}\wedge\boxed{\sigma_X=\frac{a}{\sqrt{3}}}\right)$$

DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR O DE SIMPSON

$$X \sim \mathrm{Tri}(a,b) \quad a<b$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{b-a}-\dfrac{2}{(b-a)^2}\left|a+b-2x\right| & \text{si} \quad x\in(a;b) \\ 0 & \text{si} \quad x\notin(a;b) \end{cases}$$

(CONT.)

$$\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2} \quad \mathbb{V}X = \frac{(b-a)^2}{24}$$

$$\textit{caso particular}:$$

$$X \sim \mathrm{Tri}(-a,a) \Rightarrow \left(\mathbb{E}X = 0 \wedge \mathbb{V}X = \frac{a^2}{6} \wedge \boxed{\sigma_X = \frac{a}{\sqrt{6}}} \right)$$