

EXAMEN DICIEMBRE 2024 - VERSIÓN 4
MARTES 17 DE DICIEMBRE DE 2024

Nro de Lista	Cédula	Apellido y nombre	Firma

Información importante:

- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- La duración del examen es de tres horas y media.
- Recordar que se aprueba el examen con 6 ejercicios contestados correctamente y a lo sumo 2 mal contestados, ó al menos 7 contestados correctamente.

Respuestas de los ejercicios de múltiple opción:

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E o F**, según corresponda.

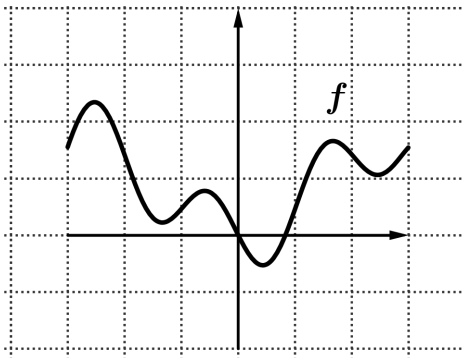
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
D	D	C	C	E	E	F	A	E	D

Notación y propiedades útiles:

- $S^*(f, P)$ denota la suma superior y $S_*(f, P)$ la suma inferior de f con respecto a la partición P .
 - **Propiedades de la función logaritmo:**
 1. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
 2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
 3. $\log(a^k) = k \log(a)$
-

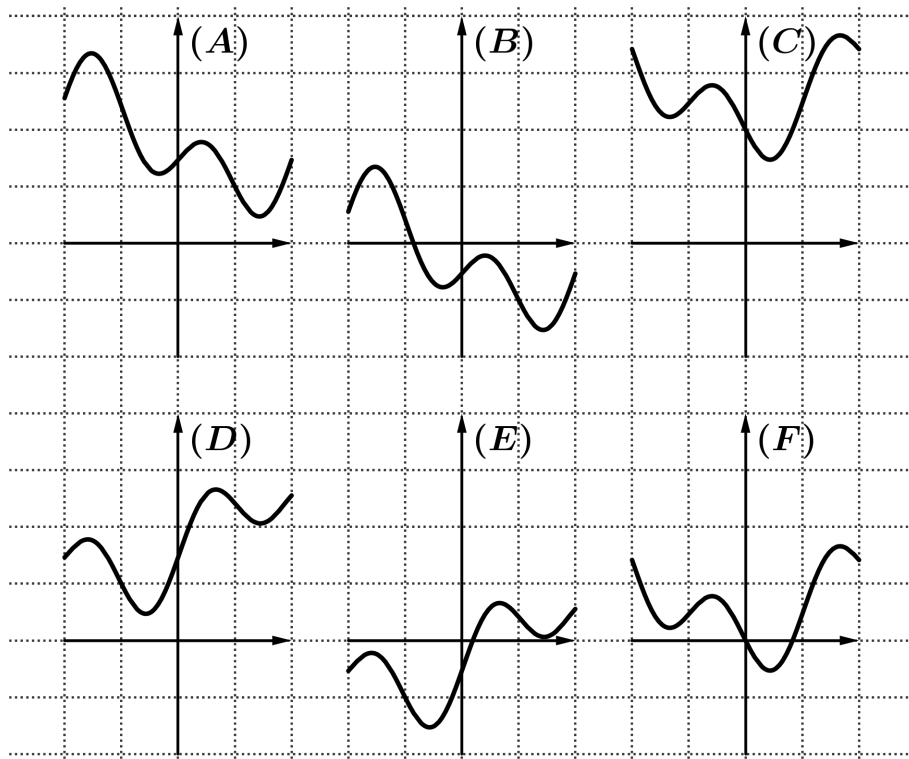
Ejercicio 1

Sea $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo gráfico es el siguiente



Indicar a cuál de las imágenes corresponde el gráfico de la función $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = f(x + 1) + 1$$



Ejercicio 2

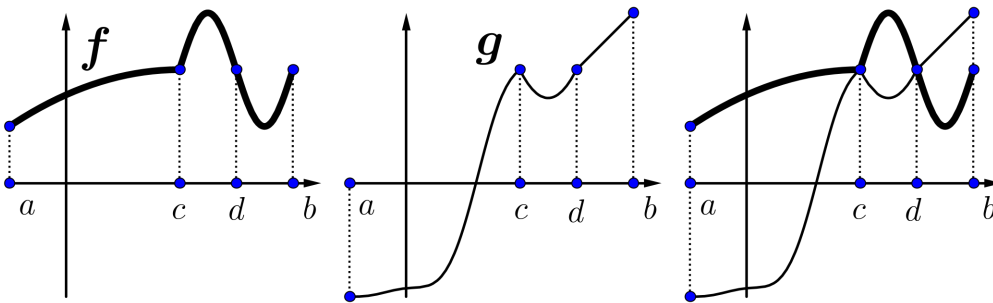
Sea $f : [0, 16] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ y $P = \{0, 1, 4, 16\}$ una partición del intervalo $[0, 16]$. Indique cuánto vale $S^*(f, P) - S_*(f, P)$:

- | | | |
|-------|-------|--------------------|
| A) 0 | C) 27 | E) $\frac{128}{3}$ |
| B) 55 | D) 28 | F) $\frac{64}{3}$ |
-

Ejercicio 3

Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas.

En la imagen se muestran de izquierda a derecha el gráfico de f , luego el de g y por último ambos gráficos juntos.



Sea $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$H(x) = \int_0^x (f(t) - g(t)) dt$$

Determinar cuál de las siguientes afirmaciones relativas al crecimiento y signo de la función H es cierta.

- A) H es creciente y $H(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
 - B) H es creciente y existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $H(x_0) < 0$.
 - C) El máximo de H se realiza en d y existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $H(x_0) < 0$.
 - D) El máximo de H se realiza en c y $H(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
 - E) El máximo de H se realiza en c y existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $H(x_0) < 0$.
 - F) El máximo de H se realiza en d y $H(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
-

Ejercicio 4

⁴ Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se consideran las siguientes afirmaciones:

- Afirmación I: Existe $\delta > 0$ tal que la función f está acotada en el intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$.
- Afirmación II: La función f tiene límite finito en 1.
- Afirmación III: La función f es continua en 1.

Indicar cuál de las siguientes cadenas de implicancias es cierta para las afirmaciones anteriores.

- A) Afirmación I \Rightarrow Afirmación II \Rightarrow Afirmación III
 - B) Afirmación I \Rightarrow Afirmación III \Rightarrow Afirmación II
 - C) Afirmación III \Rightarrow Afirmación II \Rightarrow Afirmación I
 - D) Afirmación II \Rightarrow Afirmación I \Rightarrow Afirmación III
 - E) Afirmación II \Rightarrow Afirmación III \Rightarrow Afirmación I
 - F) Afirmación III \Rightarrow Afirmación I \Rightarrow Afirmación II
-

Ejercicio 5

Un auto se desplaza por una avenida de la ciudad y luego toma una ruta nacional. En la ciudad, la velocidad máxima es de 45 km/h mientras que en la ruta es de 90 km/h.

Para controlar la velocidad hay distintos radares que toman la velocidad al momento de pasar el vehículo.

- A las 9:40 el auto pasa por el primer radar (R_1) que se encuentra dentro de la ciudad. El radar indica que la velocidad es de 30 km/h.
- A las 10:00 pasa por el radar R_2 que se encuentra en el punto exacto en donde termina la ciudad y comienza la ruta. El radar R_2 se encuentra a 12 km del radar R_1 . El radar R_2 indica que la velocidad del auto es de 40 km/h.
- A las 10:20, luego de haber recorrido 45 km desde la posición del radar R_1 , pasa por un tercer radar (R_3) que se encuentra en la ruta. El radar R_3 indica que la velocidad del auto es de 70 km/h.

Determinar cuál de las siguientes afirmaciones relativas al límite de velocidad se puede determinar solo con la información de los radares (ubicación de los radares, horarios en los que pasó el auto por cada radar y la velocidad que llevaba en esos instantes).

- A) El auto siempre respetó los límites de velocidad.
 - B) En algún momento dentro de la ciudad el auto superó el límite de velocidad, pero no se puede determinar si superó el límite de velocidad en ruta.
 - C) En algún momento dentro de la ciudad y también en algún momento dentro de la ruta el auto superó los límites de velocidad permitidos respectivamente.
 - D) No es posible determinar si el auto superó los límites de velocidad en algún momento.
 - E) El auto superó el límite de velocidad en algún momento en la ruta, pero no se puede determinar si superó el límite de velocidad en la ciudad.
 - F) El auto en todo momento fue a una velocidad mayor a la permitida.
-

Ejercicio 6

Sea $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de la cual se sabe que:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = L$, con $L > 0$;
- f es dos veces derivable y tanto f' como f'' son continuas en el intervalo $(-1, 1)$. Es decir, $f \in C^2(-1, 1)$.

Indique la opción correcta:

- | | |
|--|--|
| A) $f(0) = 0$, $f'(0) = L$ y $f''(0) = \frac{L}{2}$ | D) $f(0) = 0$, $f'(0) = L$ y $f''(0) = 2L$ |
| B) $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = L$ | E) $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 2L$ |
| C) $f(0) = 0$, $f'(0) = L$ y $f''(0) = L$ | F) $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = \frac{L}{2}$ |
-

Ejercicio 7

Indicar el valor de la siguiente integral $\int_0^2 \frac{3x + 4}{x^2 + 3x + 2} dx$

- | | | |
|-----------------------------------|--------------|-----------------------------------|
| A) $\log(6)$ | C) $\log(3)$ | E) $\log\left(\frac{2}{3}\right)$ |
| B) $\log\left(\frac{3}{2}\right)$ | D) $\log(4)$ | F) $\log(12)$ |
-

Ejercicio 8

Indique el valor de la siguiente integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} (\sin(x))^2 \cos(x) dx$.

- | | |
|---|--|
| A) $e - 2$ | D) $-e^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi + 2 \right) + 2$ |
| B) $-e - 2$ | E) $-e^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} - 2 \right) - 2$ |
| C) $e^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi + 2 \right) - 2$ | F) 0 |
-

Ejercicio 9

Se desea construir un tanque de 1 m^3 (un metro cúbico) de capacidad. El tanque tendrá una forma cilíndrica con base y tapa circular.

El costo de la construcción de un tanque de estas características es de 100 dólares por metro cuadrado. Si construimos el tanque más barato en estas condiciones, entonces el área de su superficie total (área de la base + área lateral + área de la tapa) expresado en metros cuadrados es:

A) $2(\sqrt{\pi})^3 + 2\pi^2$

C) 4π

E) $3\sqrt[3]{2\pi}$

B) $\frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}}$

D) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{\pi}}$

F) $2 + 2\pi$

Recordar que: el volumen del cilindro de base circular de radio r y altura h es $\pi r^2 h$, el área del círculo de radio r es πr^2 y su perímetro es $2\pi r$.

Ejercicio 10

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{-\sin(t)} dt.$$

Si $p_2(f, 0)(x)$ denota el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de 0 evaluado en el punto x , indicar el valor de $p_2(f, 0)(1)$.

A) $p_2(f, 0)(1) = 5$

C) $p_2(f, 0)(1) = \frac{3}{2}$

E) $p_2(f, 0)(1) = \frac{7}{2}$

B) $p_2(f, 0)(1) = -\frac{1}{2}$

D) $p_2(f, 0)(1) = \frac{1}{2}$

F) $p_2(f, 0)(1) = 4$
