Examen Diciembre 2024 - Versión 1
Martes 17 de Diciembre de 2024

Nro de Lista	Cédula	Apellido y nombre	Firma

Información importante:

- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- La duración del examen es de tres horas y media.
- Recordar que se aprueba el examen con 6 ejercicios contestados correctamente y a lo sumo 2 mal contestados, ó al menos 7 contestados correctamente.

Respuestas de los ejercicios de múltiple opción:
Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E o F**, según corresponda.

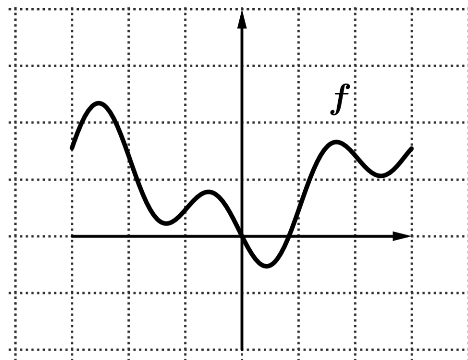
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
D	A	F	F	B	B	C	B	B	A

Notación y propiedades útiles:

- $S^*(f, P)$ denota la suma superior y $S_*(f, P)$ la suma inferior de f con respecto a la partición P.
- **Propiedades de la función logaritmo:**
  1. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
  2. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
  3. $\log(a^k) = k\log(a)$

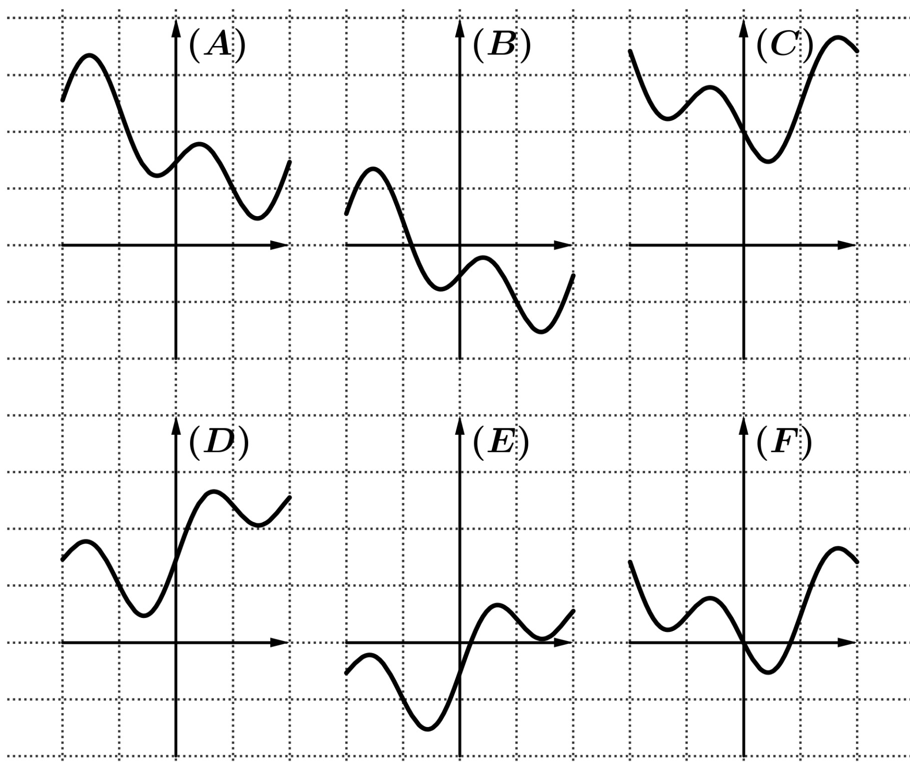
Ejercicio 1

Sea $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico es el siguiente



Indicar a cuál de las imágenes corresponde el gráfico de la función $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = f(x+1) + 1$$



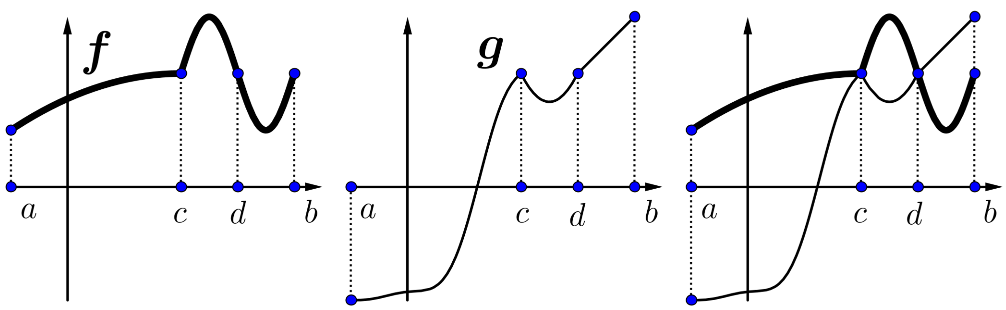
Ejercicio 2

Sea $f : [0, 16] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ y $P = \{0, 1, 4, 16\}$ una partición del intervalo $[0, 16]$.
Indique cuánto vale $S^*(f, P) - S_*(f, P)$:

A) 28
B) 55
C) 27
D) $\frac{128}{3}$
E) $\frac{64}{3}$
F) 0

Ejercicio 3

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas.
En la imagen se muestran de izquierda a derecha el gráfico de f, luego el de g y por último ambos gráficos juntos.



Sea $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$H(x) = \int_{\mathbf{0}}^{x} (f(t) - g(t))\, \mathrm{d}t$$

Determinar cuál de las siguientes afirmaciones relativas al crecimiento y signo de la función H es cierta.

A) H es creciente y $H(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
B) H es creciente y existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $H(x_0) < 0$.
C) El máximo de H se realiza en c y $H(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
D) El máximo de H se realiza en c y existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $H(x_0) < 0$.
E) El máximo de H se realiza en d y $H(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
F) El máximo de H se realiza en d y existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $H(x_0) < 0$.

Ejercicio 4

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se consideran las siguientes afirmaciones:

- Afirmación I: Existe $\delta > 0$ tal que la función f está acotada en el intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$.
- Afirmación II: La función f tiene límite finito en 1.
- Afirmación III: La función f es continua en 1.

Indicar cuál de las siguientes cadenas de implicancias es cierta para las afirmaciones anteriores.

A) Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación III
B) Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación II
C) Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación III
D) Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación I
E) Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación I $\Rightarrow$ Afirmación II
F) Afirmación III $\Rightarrow$ Afirmación II $\Rightarrow$ Afirmación I

Ejercicio 5

Un auto se desplaza por una avenida de la ciudad y luego toma una ruta nacional. En la ciudad, la velocidad máxima es de 45 km/h mientras que en la ruta es de 90 km/h.
Para controlar la velocidad hay distintos radares que toman la velocidad al momento de pasar el vehículo.

- A las 9:40 el auto pasa por el primer radar (R_1) que se encuentra dentro de la ciudad. El radar indica que la velocidad es de 30 km/h.
- A las 10:00 pasa por el radar R_2 que se encuentra en el punto exacto en donde termina la ciudad y comienza la ruta. El radar R_2 se encuentra a 12 km del radar R_1. El radar R_2 indica que la velocidad del auto es de 40 km/h.
- A las 10:20, luego de haber recorrido 45 km desde la posición del radar R_1, pasa por un tercer radar (R_3) que se encuentra en la ruta. El radar R_3 indica que la velocidad del auto es de 70 km/h.

Determinar cuál de las siguientes afirmaciones relativas al límite de velocidad se puede determinar solo con la información de los radares (ubicación de los radares, horarios en los que pasó el auto por cada radar y la velocidad que llevaba en esos instantes).

A) En algún momento dentro de la ciudad el auto superó el límite de velocidad, pero no se puede determinar si superó el límite de velocidad en ruta.
B) El auto superó el límite de velocidad en algún momento en la ruta, pero no se puede determinar si superó el límite de velocidad en la ciudad.
C) En algún momento dentro de la ciudad y también en algún momento dentro de la ruta el auto superó los límites de velocidad permitidos respectivamente.
D) No es posible determinar si el auto superó los límites de velocidad en algún momento.
E) El auto en todo momento fue a una velocidad mayor a la permitida.
F) El auto siempre respetó los límites de velocidad.

Ejercicio 6

Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una función de la cual se sabe que:

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = L$, con $L > 0$;
- f es dos veces derivable y tanto f' como f'' son continuas en el intervalo $(-1, 1)$. Es decir, $f \in C^2(-1, 1)$.

Indique la opción correcta:

A) $f(0) = 0,\ f'(0) = 0$ y $f''(0) = L$

B) $f(0) = 0,\ f'(0) = 0$ y $f''(0) = 2L$

C) $f(0) = 0,\ f'(0) = L$ y $f''(0) = L$

D) $f(0) = 0,\ f'(0) = L$ y $f''(0) = 2L$

E) $f(0) = 0,\ f'(0) = 0$ y $f''(0) = \frac{L}{2}$

F) $f(0) = 0,\ f'(0) = L$ y $f''(0) = \frac{L}{2}$

Ejercicio 7

Indicar el valor de la siguiente integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x+4}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$

A) $\log\left(\frac{3}{2}\right)$

B) $\log(3)$

C) $\log(12)$

D) $\log(4)$

E) $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

F) $\log(6)$

Ejercicio 8

Indique el valor de la siguiente integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)}\left(\sin(x)\right)^2\cos(x)\mathrm{d}x$.

A) $-e - 2$

B) $e - 2$

C) $e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4} - \pi + 2\right) - 2$

D) $-e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4} - \pi + 2\right) + 2$

E) $-e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} - 2\right) - 2$

F) 0

Ejercicio 9

Se desea construir un tanque de 1 m^3 (un metro cúbico) de capacidad. El tanque tendrá una forma cilíndrica con base y tapa círcular.
El costo de la construcción de un tanque de estas características es de 100 dólares por metro cuadrado. Si construimos el tanque más barato en estas condiciones, entonces el área de su superficie total (área de la base + área lateral + área de la tapa) expresado en metros cuadrados es:

A) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2\pi}}$

B) $3\sqrt[3]{2\pi}$

C) 4π

D) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{\pi}}$

E) $2+2\pi$

F) $2(\sqrt{\pi})^3+2\pi^2$

Recordar que: el volumen del cilindro de base circular de radio r y altura h es $\pi r^2 h$, el área del círculo de radio r es πr^2 y su perímetro es $2\pi r$.

Ejercicio 10

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\int_x^{x^2} e^{-\sin(t)}\mathrm{d}t.$$

Si $p_2(f,0)(x)$ denota el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de 0 evaluado en el punto x, indicar el valor de $p_2(f,0)(1)$.

A) $p_2(f,0)(1)=\frac{1}{2}$

B) $p_2(f,0)(1)=-\frac{1}{2}$

C) $p_2(f,0)(1)=\frac{3}{2}$

D) $p_2(f,0)(1)=\frac{7}{2}$

E) $p_2(f,0)(1)=4$

F) $p_2(f,0)(1)=5$

Resolución de la versión 1

Ejercicio 1:

$$g(x) = f(x+1) + 1 \quad \forall x$$

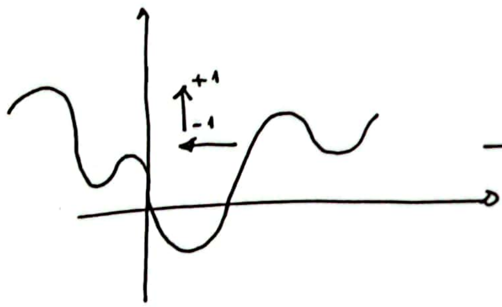
- $g(0) = f(0+1) + 1 = f(1) + 1 \approx 0.5 + 1 = 1.5 \Longrightarrow$ descarto B, C, E, F

  ver gráfico de f

- Quedan A y D. Puesto que $g(x) = f(x+1) + 1$, debería verse:

  $f(x+1)$: traslada 1 hacia la izq.

  $+1$: traslada 1 hacia arriba

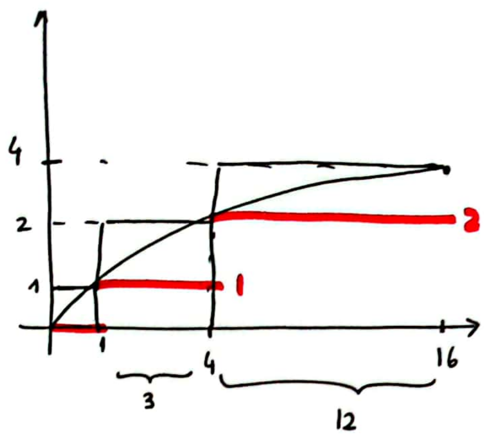


$\longrightarrow$ ¿A o D corresponden a estas dos traslaciones? Si no se identifica a ojo,

Como es fácil identificar que $f(0)=0$, podemos ver cuánto vale

$$g(-1) = f(-1+1) + 1 = f(0) + 1 = 0 + 1 = 1 \Longrightarrow \text{tiene que ser } D$$

Ejercicio 2 $\quad f(x)=\sqrt{x}\;$ y $\;P=\{0,1,4,16\}$



$$S^*(f,P)= 1\times1+2\times3+4\times12=1+6+48=55$$

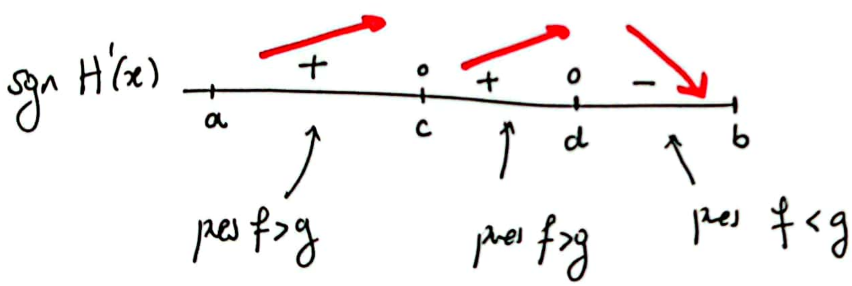
$$S_*(f,P)=0\times1+1\times3+2\times12=3+24=27$$

$$\Rightarrow S^*(f,P)-S_*(f,P)=55-27=28.$$

Ejercicio 3:

- $H(a)=\displaystyle\int_0^a (f-g)\,dt = -\overbrace{\int_a^0 \underbrace{(f-g)}_{7^\circ}\,dt}^{7^\circ} < 0 \Rightarrow \exists\ x_0=a$ tal que $H(x_0)<0$.

- $H'(x)=f(x)-g(x)$. Notar del gráfico de f y g que:



Conclusión:

* $\exists\ x_0=a$ tal que $H'(x_0)<0$
* H <u>no</u> es creciente en $[a,b]$
* En c no puede haber un máx (pues H es creciente en (a,c) y (c,d))
* En d hay un máx relativo (que tiene que ser absoluto por el sgn de H').

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El máx abs. se realiza en } d \text{ y } \exists\ x_0 /\ H(x_0)<0}$

Ejercicio 4:

Af I: "$\exists\ \delta>0$ tal que f está acotada en $(1-\delta, 1+\delta)$"

Af II: "$\exists \lim_{x\to 1} f(x)$ y es finito"

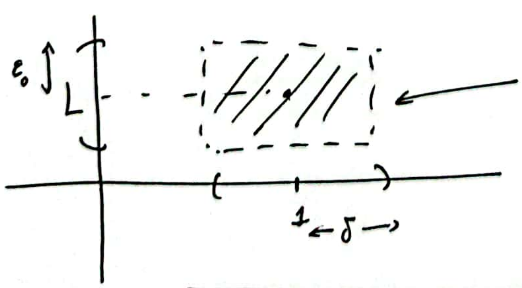
Af III: "f es continua en 1"

- f es continua en 1 $\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$ · $\exists \lim_{x\to 1} f(x)$
  · $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

  Luego, $\boxed{\text{Af III} \Rightarrow \text{Af II}}$

- $\lim_{x\to 1} f(x) = L \overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}} \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ tal que si $0<|x-1|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

  Tomemos $\varepsilon_0>0$ fijo $\Rightarrow \exists\ \delta>0$ tal que si $x\in(1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow$ $f(x)\in(L-\varepsilon_0, L+\varepsilon_0) \Rightarrow f$ está acotada en $(1-\delta, 1+\delta)$.

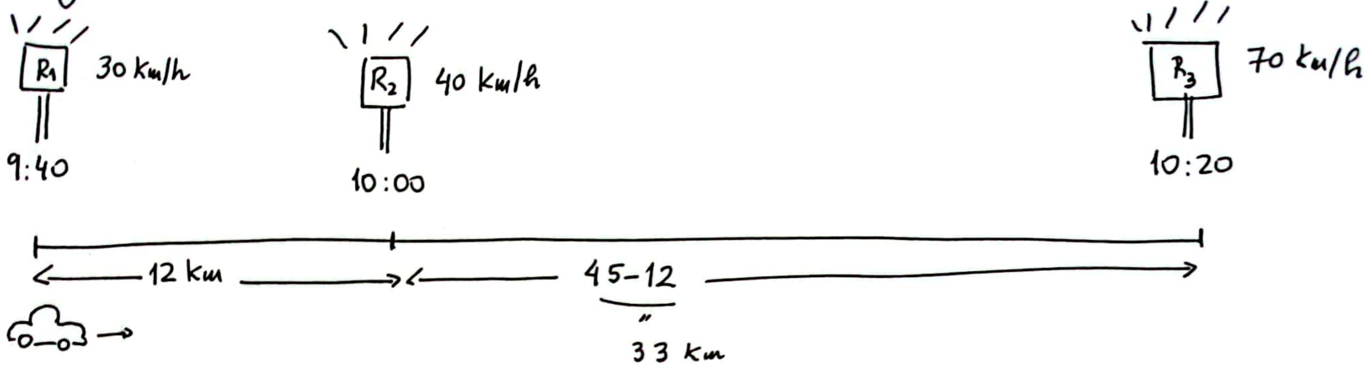


si $x\in(1-\delta,1+\delta) \Rightarrow (x,f(x))$ está en este rectángulo

Luego, $\boxed{\text{Af II} \Rightarrow \text{Af I}}$

Finalmente, $\boxed{\text{Af III} \Rightarrow \text{Af II} \Rightarrow \text{Af I}}$

Ejercicio 5:



CIUDAD

(velocidad máx permitida 45 km/h)

RUTA

(veloc. máx permitida 90 km/h)

- ¿Pasó el límite permitido en la ciudad?

Tiempo qe le llevaría si fuera a la máx vel. permitida:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 45 \text{ km/h} \longrightarrow \frac{12}{\Delta t} = 45 \text{ Km/h} \Longrightarrow \Delta t = \frac{12}{45}\,h =$$

$$= \frac{12}{45} \times 60 \text{ min}$$

$$= \frac{4\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times 2\times 2\times\cancel{5}}{\cancel{9}\times\cancel{5}}$$

$$= 16 \text{ min}$$

Entre R_1 y R_2 demoró 20 min. Sin embargo:

* pudo haber respetado la vel. máx.
* pudo haber pasado la vel. máx y luego detenerse (por ejemplo) para demorar 20' entre R_1 y R_2.

Conclusión: no tenemos cómo saber si respetó o no el límite de velocidad en ciudad.

¿Pasó el límite permitido en la ruta?

Tiempo que le llevaría si fuera a la máx vel. permitida:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 90\ km/h \Longrightarrow \frac{33\ km}{\Delta t} = 90\ km/h \Longrightarrow$$

$$\Delta t = \frac{33}{90}\ h = \frac{33}{9\cancel{0}} \times 6\cancel{0}\ min = \frac{\cancel{3} \times 11 \times \cancel{3} \times 2}{\cancel{9}} = 22',$$

sin embargo le llevó 20' ir de R_2 a R_3 $\Longrightarrow$ SEGURO que pasó los 90 Km/h en el tramo R_2-R_3.

Conclusión: "La información de los radares no permite determinar si se superó el límite de velocidad en la ciudad. Pero sí que en algún momento en la ruta se superó el límite de velocidad".

<u>Ejercicio 6</u>:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} \underset{(*)}{\overset{\text{L'Hopital}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{2x} \underset{(**)}{\overset{\text{L'Hopital}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{2}$$

(*) si fuera $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) \neq 0$, este límite daría + o - ∞

$\Rightarrow$ tiene qe ser $\boxed{f(0) = 0}$

(**) si fuera $f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) \neq 0$, este límite daría + o - ∞

(por izq. o der). $\Rightarrow$ tiene qe ser $\boxed{f'(0) = 0}$

Luego, tiene qe ser $L = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} f''(x)$.

Como además f'' es continua, tiene qe ser $f''(0) = \lim_{x \to 0} f''(x)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} f''(x) = \frac{1}{2} f''(0)$

$\Rightarrow \boxed{f''(0) = 2L}$

<u>Conclusión</u>: $\boxed{f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 \quad ; \quad f''(0) = 2L}$

Ejercicio 7 :

$$\int_0^2 \frac{3x+4}{x^2+3x+2}\,dx = ?$$

Paso 1: Factorizar el pol. de abajo: (si α_1 y α_2 son raíces, escribir $x^2+3x+2 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$)

$$x^2+3x+2=0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4.2}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2} \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$$

$$x^2+3x+2 = (x-(-1))(x-(-2)) = (x+1)(x+2)$$

Paso 2: Fracciones simples:

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{\overbrace{(A+B)}^{3}x + \overbrace{2A+B}^{4}}{(x+1)(x+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=3 & \to B = 3-A \\ 2A+B=4 & \to 2A+3-A=4 \to \boxed{A=1} \to \boxed{B=2} \end{cases}$$

Paso 3: Integrar:

$$\int_0^2 \frac{3x+4}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x+1}\,dx + 2\int_0^2 \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \log(x+1)\Big|_0^2 + 2\log(x+2)\Big|_0^2$$

$$= \log(3) - \underbrace{\log(1)}_{0} + 2\log(4) - 2\log(2)$$

$$= \log(3) + 2\big(\underbrace{\log(4)-\log(2)}_{\log\left(\frac{4}{2}\right) = \log(2)}\big)$$

$= \log(3) + 2\log(2) = \log(3) + \log(2^2) = \log(3) + \log(4)$

$= \log(3 \times 4) = \log(12).$

Ejercicio 8:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} (\sin x)^2 \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \right]^{\text{C.V.}} = \int_{\underset{0}{\overset{\shortparallel}{\text{sen}(0)}}}^{\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\text{sen}(\frac{\pi}{2})}} e^u u^2 \, du = \int_0^1 e^u u^2 \, du =$$

Partes: $\int f g' = f \cdot g - \int f' g$

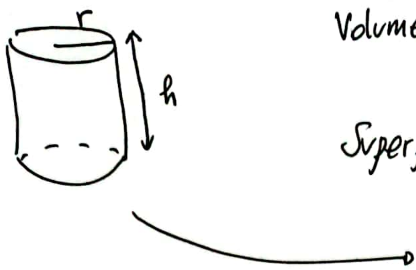
$$= \left[\begin{array}{l} f = u^2 \rightarrow f' = 2u \\ g' = e^u \rightarrow g = e^u \end{array} \right] = u^2 e^u - \int e^u 2u \, du$$

$$= \left[\begin{array}{l} f = 2u \rightarrow f' = 2 \\ g' = e^u \rightarrow g = e^u \end{array} \right] = u^2 e^u - \Big(2u e^u - \underbrace{\int 2 e^u du}_{2e^u} \Big)$$

$$= u^2 e^u - 2u e^u + 2 e^u = e^u (u^2 - 2u + 2) \Big|_0^1$$

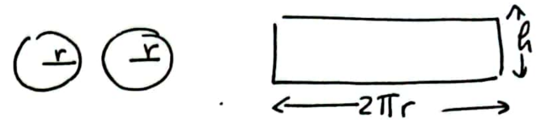
$$= e^1 (1 - \cancel{2} + \cancel{2}) - e^0 (2) = \boxed{e - 2}$$

Ejercicio 9:



Volumen $= \pi r^2 h = 1\, m^3$

Superficie = Area tapas + Area sup. lateral



$$= 2 \times \pi r^2 + 2\pi r h$$

Queremos que el volumen sea 1 y la superficie total sea lo más chica posible.

- $\pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

- $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r}\, \dfrac{1}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} =$

$$= 2\pi r^2 + 2\,\frac{1}{r} \qquad \text{con} \quad 0 \leq r$$

- Buscamos $r > 0$ tal que $S(r)$ sea lo más chica posible.

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 4\pi r^3 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{\cancel{2}}{\underset{2}{\cancel{4}}\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Notar que las otras raíces del polinomio $4\pi r^3 - 2$ no son reales ya que:

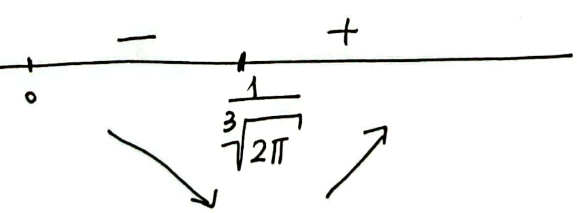
	4π	0	0	-2
$\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}$		$\frac{4\pi}{(2\pi)^{1/3}}$	$\frac{4\pi}{(2\pi)^{2/3}}$	$\frac{4\pi}{(2\pi)^{3/3}} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$
	4π	$\frac{4\pi}{(2\pi)^{1/3}}$	$\frac{4\pi}{(2\pi)^{2/3}}$	0

$$4\pi x^2 + \frac{4\pi}{(2\pi)^{1/3}}x + \frac{4\pi}{(2\pi)^{2/3}} = 0 \iff$$

$$x^2 + \frac{1}{(2\pi)^{1/3}}x + \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} = 0 \iff$$

$$x = \frac{-\frac{1}{(2\pi)^{1/3}} \pm \sqrt{\overbrace{\frac{1}{(2\pi)^{2/3}} - 4 \times \frac{1}{(2\pi)^{2/3}}}^{<0}}}{2} \qquad \times$$

Luego, sgn $S'(r)$



En $x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ hay un mínimo relativo, que también es absoluto.

$$\text{Superficie mínima} = S(x_0) = S\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{(2\pi)^{1/3}}}$$

$$= \frac{2\pi}{(2\pi)^{2/3}} + 2\times(2\pi)^{1/3} = (2\pi)^{1/3} + 2\times(2\pi)^{1/3}$$

$$= \boxed{3\times(2\pi)^{1/3}} = 3\times\sqrt[3]{2\pi}$$

Ejercicio 10

$P_2(f,0)(1) = ?$

$$P_2(f,0)(x) = \overbrace{f(0)}^{=0} + \overbrace{f'(0)}^{=-1} x + \frac{\overbrace{f''(0)}^{=3}}{2!} x^2 = -x + \frac{3}{2}x^2$$

$$f(x) = \int_x^{x^2} e^{-sen(t)} dt$$

- $f(0) = \int_0^0 e^{-sen(t)} dt = 0$
- $f'(x) \underset{T.F.}{=} e^{-sen(x^2)} \cdot 2x - e^{-sen(x)} \to f'(0) = -1$
- $f''(x) = e^{-sen(x^2)} (-sen(x^2))' \cdot 2x + e^{-sen(x^2)} \cdot 2 - e^{-sen x} (-sen x)'$

$$= e^{-sen(x^2)} (-cos(x^2)\, 2x) \cdot 2x + e^{-sen(x^2)} \cdot 2 + e^{-sen x} cos(x)$$

$\to f''(0) = 0 + 2 + 1 = 3$

Luego,

$$p_2(f,0)(1) = -1 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$