Solución del examen - 16/12/24

Ejercicio 1.

a) El código dado implica que la factorización LU de la matriz A (esto es, $PA = LU$), está dada por

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El determinante de A se calcula a partir de que $\det(P)\det(A) = \det(L)\det(U)$, y como $\det(P) = 1$ y $\det(L) = 1$ (matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal), se tiene

$$\det(A) = \det(U) = 5 \cdot 2 \cdot (-1) = -10.$$

b) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se resuelve eficientemente usando la factorización LU:

1. Resolver $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $P = I$. Esto requiere realizar una sustitución hacia adelante y se obtiene por resultado $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}^t$.
2. Resolver $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Esto requiere realizar una sustitución hacia atrás y se obtiene por resultado

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

c) La matriz A se obtiene como $A = P^{-1}LU$. Dado que $P = I$, tenemos

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 13/5 & 7/5 \\ 3 & 4/5 & -3/10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2.

a) La forma de Lagrange de p es:

$$p(x) = f(x_0)L_0^2(x) + f(x_1)L_1^2(x) + f(x_2)L_2^2(x),$$

donde los polinomios de base de Lagrange son los únicos polinomios de grado 2 que cumplen

$$L_i^2(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2.$$

Explícitamente, usando que $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, tenemos

$$L_0^2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2h^2}, \quad L_1^2(x) = -\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{h^2}, \quad L_2^2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}.$$

b) Las derivadas de los polinomios de base de Lagrange en x_0 son

$$(L_0^2)'(x_0) = \frac{[(x-x_1)(x-x_2)]'\big|_{x=x_0}}{2h^2} = \frac{-3}{2h},$$
$$(L_1^2)'(x_0) = -\frac{[(x-x_0)(x-x_2)]'\big|_{x=x_0}}{h^2} = \frac{2}{h},$$
$$(L_2^2)'(x_0) = \frac{[(x-x_0)(x-x_1)]'\big|_{x=x_0}}{2h^2} = \frac{-1}{2h}.$$

Por lo tanto,

$$p'(x_0) = f(x_0)(L_0^2)'(x_0) + f(x_1)(L_1^2)'(x_0) + f(x_2)(L_2^2)'(x_0) = \frac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h}.$$

c) Para demostrar lo pedido, basta con realizar desarrollos de Taylor de orden 3 para f alrededor de x_0:

$$f(x_1) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi),$$
$$f(x_2) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x_0) + \frac{(2h)^3}{6}f'''(\eta),$$

con $\xi \in [x_0, x_1]$, $\eta \in [x_0, x_2]$. Sustituyendo, tenemos

$$\begin{aligned} p'(x_0) = \frac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h} &= \frac{1}{2h}\left[2hf'(x_0) + \frac{2h^3}{3}f'''(\xi) - \frac{(4h^3}{3}f'''(\eta)\right] \\ &= f'(x_0) + \frac{1}{3}\left[f'''(\xi) - 2f'''(\eta)\right]h^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple

$$|f'(x_0) - p'(x_0)| \leq Ch^2,$$

con $C = \|f'''\|_{L^\infty([x_0,x_2])}$.

Ejercicio 3.

a) Sea $k \geq 1$. Dados x_{k-1}, x_k, el método de la secante utiliza una aproximación de la derivada basada en la pendiente de la recta secante entre los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$, que es el gráfico de la función lineal

$$L(x) = f(x_k) + s_k(x - x_k), \quad s_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

El iterado x^{k+1} queda dado por la intersección de esta recta con el eje de las x,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{s_k}.$$

Notar que este iterado queda bien definido si y solo si $s_k \neq 0$, esto es, si $f(x_{k-1}) \neq f(x_k)$.

b) Definimos el error en el paso k como $e_k = x_k - x^*$, donde x^* es la raíz buscada de f. Usando el hecho de que L es la interpolante lineal por $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ y la fórmula del error de interpolación dada en el enunciado del examen, tenemos que existe un γ_k tal que

$$f(x_*) - L(x_*) = \frac{f''(\gamma_k)}{2}(x_* - x_{k-1})(x_* - x_k) = \frac{f''(\gamma_k)}{2}e_{k-1}e_k.$$

Por otra parte, como $L(x_{k+1}) = f(x_*) = 0$, tenemos

$$f(x_*) - L(x_*) = L(x_{k+1}) - L(x_*) = s_k(x_{k+1} - x_*) = s_k e_{k+1}.$$

Combinando las dos identidades que obtuvimos, tenemos

$$e_{k+1} = \frac{f''(\gamma_k)}{2s_k}e_{k-1}e_k$$

Por lo tanto, basta con tomar $C_{k+1} = \left|\frac{f''(\gamma_k)}{2s_k}\right|$.

c) Sean $f(x) = x^2 + 2x$ y $x_* = 0$ la raíz que buscamos. Notar que, como f es cuadrática, f'' es una función constante e igual a 2. Dados $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, calculamos

$$s_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{8-3}{1} = 5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{s_1} = 2 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5}.$$

Así, tenemos $e_0 = 1$, $e_1 = 2$, $e_2 = 2/5$, y la constante que hallamos en la parte anterior es

$$C_{k+1} = \left|\frac{f''(\gamma_k)}{2s_k}\right| = \frac{1}{5}.$$

Verificamos así que se cumple la desigualdad de la parte anterior (de hecho, es una igualdad).

Ejercicio 4.

a) Para computar esta factorización de manera numéricamente estable, se puede emplear el método de transformaciones de Householder (ver notas de teórico). La idea es construir $H_1, \ldots, H_n$ ortogonales (de Householder) tales que

$$H_n \ldots H_1 A = R \text{ sea triangular superior, y } Q = (H_n \ldots H_1)^{-1} = H_1 H_2 \cdots H_n.$$

El procedimiento es

(a) Inicialmente, $A_1 = A$, $\tilde{A}_1 = A$.

(b) Para $k = 1, \ldots, n$, realizar:

i. Seleccionar la primera columna de $\tilde{A}_k$, $\tilde{A}_k^{(1)}$.

ii. Tomar el vector $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{m-k+1}$ tal que la transformación de Householder que define, $\tilde{H}_k = I - 2\frac{\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^t}{\|\mathbf{u}_k\|_2^2}$ cumpla $\tilde{H}_k A_k^{(1)}$ sea colineal con el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^{m-k+1}$. Esto es, basta con tomar $\mathbf{u}_k = A_k^{(1)} \pm \|A_k^{(1)}\|_2 \mathbf{e}_1$. Para evitar posibles efectos de cancelación, es preferible elegir el signo igual al del primer elemento en $A_k^{(1)}$.

iii. Construir la matriz $H_k \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ por bloques,

$$H_k := \left[\begin{array}{c|c} I_{k-1} & \mathcal{O}_{(k-1)\times(m-k+1)} \\ \hline \mathcal{O}_{(k-1)\times(m-k+1)} & \tilde{H}_k \end{array}\right],$$

donde $I_{k-1} \in \mathcal{M}_{k-1}(\mathbb{R})$ es la matriz identidad.

iv. Actualizar $A_{k+1} = H_k A_k \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, y $\tilde{A}_{k+1} \in \mathcal{M}_{(m-k-1)\times(n-k-1)}(\mathbb{R})$ es la matriz que se obtiene eliminándole las primeras $k-1$ filas y $k-1$ columnas.

Este método es estable porque las transformaciones de Householder son ortogonales y no amplifican errores numéricos.

b) Los comandos realizan la operación $z = Q^t y$, y luego resuelve el sistema triangular superior $R_{(1:n)}\mathbf{x} = \mathbf{z}_{(1:n)}$ que se obtiene eliminando las últimas $m-n$ filas de R y entradas de $\mathbf{z}$. El sistema es compatible determinado porque A es de rango completo.

Para justificar por qué esto da lugar a la solución al problema de mínimos cuadrados $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, recordemos que buscamos minimizar la norma euclídea del residuo, $\|A\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$. Como $A = QR$ y Q es ortogonal, tenemos

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = \|QR\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 = \|Q^t(QR\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_2^2 = \|R\mathbf{x} - Q^t\mathbf{y}\|_2^2 = \|R\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2.$$

Como las últimas $m-n$ filas de R son nulas, esta norma se puede descomponer como

$$\|R\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_2^2 = \|R_{(1:n)}\mathbf{x} - \mathbf{z}_{(1:n)}\|_2^2 + \|\mathbf{z}_{(n+1:m)}\|_2^2.$$

Por lo tanto, para minimizar $\|A\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2$, basta con hallar el vector $\mathbf{x}$ que minimice la norma $\|R_{(1:n)}\mathbf{x} - \mathbf{z}_{(1:n)}\|_2^2$. Esta norma se anula si y solo si $\mathbf{x}$ es solución del sistema $R_{(1:n)}\mathbf{x} = \mathbf{z}_{(1:n)}$.

Finalmente, de la discusión anterior se deduce que la norma del residuo mínimo es igual a $\|\mathbf{z}(n+1 : m)\|_2$. Para calcularla de forma eficiente en Octave, basta con usar el comando `norm(z(n+1:m)` o, equivalentemente, `sqrt(z(n+1:m)'*z(n+1:m))`.