Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL
Métodos Numéricos

EXAMEN 16 DE DICIEMBRE DE 2024.

N° de examen	Apellido y Nombre	Cédula

El examen dura 3 horas. No se puede utilizar material.

Ejercicio 1. [6+8+6=20 puntos] Dada una matriz A, se corre en Octave el comando `[L,U,P] = lu(A)` y se obtienen las matrices

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcular $\det(A)$ de forma eficiente.

b) Resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de forma eficiente, donde $\mathbf{b} = [5; 7; -2]^t$.

c) Calcular la matriz A.

Ejercicio 2. [8+8+9=25 puntos] Dados una función f tan regular como sea necesario y tres puntos equiespaciados x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, con $h > 0$, queremos aproximar $f'(x_0)$.
Sea $p(x)$ el polinomio interpolante por $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0,1,2}$.

a) Escribir p en la forma de Lagrange.

b) Mostrar que vale la identidad

$$p'(x_0) = \frac{1}{2h}\Big(-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)\Big).$$

c) Demostrar que esta expresión es una aproximación de segundo orden de $f'(x_0)$, esto es, que vale
$$|f'(x_0) - p'(x_0)| \leq Ch^2.$$
¿De qué depende la constante C arriba?

Ejercicio 3. [10+10+10=30 puntos]
En este ejercicio se desea aproximar, mediante el método de la secante, una raíz x_* de una función f tan regular como sea necesario.

a) Sea $k \geq 1$. Dados x_{k-1} y x_k, justificar gráficamente cómo se computa x_{k+1} y deducir la iteración del método de la secante.

b) Se define el error en el paso k-ésimo como $e_k := x_k - x_*$. Probar que, si el iterado x^{k+1} está bien definido, entonces se cumple una desigualdad de la forma $|e_{k+1}| \leq C_{k+1}|e_k|\,|e_{k-1}|$ para un valor de C_{k+1} a definir.

c) Sea $f(x) = x^2 + 2x$, y queremos aproximar su raíz $x_* = 0$. Se inicializa el método de la secante con $x_0 = 1$, $x_1 = 2$. Computar x_2 y verificar que se cumple la desigualdad de la parte anterior para $k = 1$.

Ejercicio 4. [10+15=25 puntos]

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, con $m > n$ y $\mathrm{rg}(A) = n$. Explicar un procedimiento numéricamente estable para computar una factorización QR de la matriz A.

b) Se tiene la factorización $A = QR$, con $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ ortogonal y $R \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ triangular superior y se desea resolver un problema de mínimos cuadrados lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Para ello, se corren los siguientes comandos en Octave:

```
z = Q'*y;
x = R(1:n,1:n)\z(1:n);
```

Explicar qué hacen los comandos de arriba, y justificar matemáticamente por qué la variable `x` es la solución al problema de mínimos cuadrados. En caso de que se quisiera determinar la norma mínima del residuo en `x`, ¿cómo se la podría calcular en Octave de forma eficiente?

Algunas propiedades útiles.

Error de interpolación polinomial. Sean f de clase C^{n+1} en un intervalo $[a, b]$, los puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ en el intervalo $[a, b]$, y p_n el polinomio interpolante por $\{(x_i, f(x_i)\}_{i=0,\ldots,n}$. Entonces, para cada $x \in [a, b]$ existe un $\gamma_x \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma_x)}{(n+1)!}\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Transformaciones de Householder. Dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$, la transformación de Householder asociada a $\mathbf{u}$ es una matriz $H \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ de la forma

$$H := I - \rho\mathbf{u}\mathbf{u}^t,$$

donde $\rho := 2/\|\mathbf{u}\|_2^2$. Se cumple que, dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, si se toma $\mathbf{u} = \mathbf{v} \pm \|\mathbf{v}\|_2\,\mathbf{e}_1$ y H como arriba, entonces $H\mathbf{v} = \mp\|\mathbf{v}\|_2\,\mathbf{e}_1$.