Segundo Parcial - Geometría y Álgebra Lineal 1

Sábado 23 de noviembre de 2024

Número de prueba	APELLIDO, Nombre	Cédula de Identidad

Control	1	2	3	4	5	6	7	8
1								

La duración del parcial es de tres horas y media.
Cada respuesta correcta suma 6 puntos.
Cada respuesta incorrecta resta 1 punto.

Recordar que $\mathbb{R}_n[x]$ es el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.

Considerar las rectas $r: \begin{cases} x+y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ en $\mathbb{R}^3$.

Entonces, la distancia de r a s es:

(A) 0. **(B)** $\sqrt{2}$. **(C)** 2. **(D)** 1. **(E)** $2\sqrt{3}$.

Ejercicio 2.

Considerar el subconjunto $\mathcal{B} = \left\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\right\} \subset \mathbb{R}^4$. Indicar la opción correcta:

(A) El conjunto $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

(B) El conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente dependiente.

(C) El conjunto $\mathcal{B}$ genera un subespacio de dimensión 5.

(D) Todo vector del conjunto $\mathcal{B}$ es combinación lineal de los restantes.

(E) El conjunto $\left\{v_1, v_2, v_3, v_4\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 3.

Sean $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ tal que

- $w_1 = av_1 + v_2$,
- $w_2 = -av_1 + v_2$,
- $w_3 = v_1 + v_2 + (a+1)v_3$.

Indicar la opción correcta:

(A) Existen infinitos valores de a para los cuales $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(B) No existen valores de a para los cuales $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(C) Existe un único valor de a para el cual $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(D) Existen exactamente dos valores de a para los cuales $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(E) Existen exactamente tres valores de a para el cual $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Ejercicio 4.

Sean $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ y $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^3$.
Indicar la opción correcta:

(A) $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

(B) $U + W = \mathbb{R}^3$ y $\dim(U \cap W) = 1$.

(C) $\dim(U + W) = 4$ y $\dim(U \cap W) = 1$.

(D) $\dim(U + W) = 2$ y $U \cap W = \{(0,0,0)\}$.

(E) $\dim(U + W) = 2$ y $U \cap W = \left[(1,1,-2)\right]$.

Ejercicio 5.

Sean $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ y $\mathcal{A}$, $\mathcal{C} \subset V$ dos subconjuntos. Indicar la opción correcta:

(A) Si $\#\mathcal{A} > n$ entonces $\mathcal{A}$ es generador y si $\#\mathcal{C} < n$ entonces $\mathcal{C}$ es linealmente independiente.

(B) Si $\#\mathcal{A} > n$ entonces $\mathcal{A}$ es linealmente dependiente y si $\mathcal{C}$ es linealmente independiente entonces $\exists\, \mathcal{B}$ base de V tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$.

(C) Si $\mathcal{A}$ es linealmente independiente entonces $\exists\, \mathcal{B}$ base de V tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y si $\#\mathcal{C} > n$ entonces $\mathcal{C}$ es generador.

(D) Si $\#\mathcal{A} > n$ entonces $\mathcal{A}$ es generador y si $\#\mathcal{C} > n$ entonces $\mathcal{C}$ es linealmente independiente.

(E) Si $\#\mathcal{A} > n$ entonces $\mathcal{A}$ es linealmente dependiente y si $\#\mathcal{C} < n$ entonces $\mathcal{C}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 6.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ transformación lineal tal que:

- $N(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0, -x+y+z=0\right\}$.
- $T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- $T(0,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Indicar la opción correcta:

(A) $T(-1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(B) $T(-1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(C) $T(-1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(D) $T(-1,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(E) $T(-1,1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformación lineal. Entonces:

(A) T no es inyectiva.

(B) $\dim(N(T)) = 1$.

(C) $\dim(N(T)) = 2$.

(D) $\dim(Im(T)) = 2$.

(E) T es un isomorfismo.

Ejercicio 8.

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión finita.
Indicar la opción correcta:

(A) Si T es inyectiva entonces $\dim(N(T)) > 0$.

(B) Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un generador de V entonces $\{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ es un generador de W.

(C) Si T es sobreyectiva entonces $\dim(N(T)) = 0$.

(D) Si $\dim(V) = \dim(W)$ y T es inyectiva entonces T es un isomorfismo.

(E) Si T es sobreyectiva entonces $\dim(W) > \dim(V)$.

Ejercicio 9.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ transformación lineal dada por

$$T(a,b) = a + (2a+b)x + bx^2.$$

Si $\mathcal{A} = \left\{(1,0),(1,1)\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \left\{1, x+x^2, x^2\right\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ entonces la matriz asociada a T de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{B}$ es:

(A) ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(B) ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(C) ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(D) ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(E) ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10.

Se consideran $\mathcal{A} = \left\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\right\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \left\{1, 1+x, x^2\right\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ transformación lineal tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Entonces $T(3,2,1)$ es:

(A) $x^2 + 2x + 1$. **(B)** $2x^2 + 2x + 3$. **(C)** $7x^2 + 4x + 4$. **(D)** $7x^2 + 4x + 8$. **(E)** $x^2 + 4x$.