

N° Lista	Apellido y Nombre	Cédula

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 (25pt) 1. Resolver las siguientes inecuaciones en \mathbb{R} .

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{49}{9}\right)^{x^2+1}$.

b) $\ln(x^2 - 8) < 0$.

2. Sea A el conjunto solución de la inecuación (1a) y B el conjunto solución de la inecuación (1b). Determinar $A^c \cap B$.

Ejercicio 2 (20 pt) Calcular los siguientes límites. Justificar.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x - \sqrt{16x^2 + 3x + 1}$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x + \ln(x)}{4x^3 + e^{x/2}}$.

Ejercicio 3 (21 pt) Bosquejar el gráfico de una función $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla simultáneamente todas las condiciones siguientes:

1. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

3. Existe el límite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ pero f no es continua en 2.

4. $f'(x) > 0$ si $x \in (3, 5)$

5. f es continua en el intervalo $(2, 6)$.

6. $f^{-1}(\{1\})$ tiene exactamente 2 elementos. (recordar que $f^{-1}(\{1\})$ denota el conjunto preimagen de 1).

7. f es sobreyectiva.

Para cada condición se deberá justificar o indicar en el gráfico su cumplimiento.

Ejercicio 4 (22 pt) Sea $a \in \mathbb{R}$, se considera $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^3 - x^2 - 2x} & \text{si } x > 2 \\ -(x - a)^2 e^x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

1. Determinar si existe un valor de a tal que f sea continua en $x = 2$. Justificar.

2. Para $a = 3$, hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f por el punto $(0, f(0))$.

Ejercicio 5 (12 pt) Probar que si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.