Matemática Inicial

Segundo Parcial, 30 de noviembre de 2024.

N° Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo

Importante: En esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

El parcial dura 3 horas y es sin material ni calculadora. Poner nombre y cédula en todas las hojas. Al comenzar un nuevo ejercicio, hacerlo en una carilla nueva.

Puntajes (uso docente)

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Total

Ejercicio 1 *(15 puntos) Considera la función $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2\ln(17-x)$ siendo $D \subset \mathbb{R}$ el máximo dominio posible donde queda bien definida.*

1. *Hallar dicho dominio D.*
2. *Probar que f es biyectiva y hallar la expresión de su inversa.*
3. *Utilizando composición de funciones verificar que la función hallada en la parte anterior es la inversa de f.*

Solución:

1. Para que f esté bien definida necesitamos $17-x>0$ y por lo tanto $D=(-\infty,17)$
2. Para probar que f es inyectiva partimos de $x_1,x_2 \in D$ con $x_1 \neq x_2$, luego $17-x_1 \neq 17-x_2 \Rightarrow \ln(17-x_1) \neq \ln(17-x_2)$, ya que la función $\ln(x)$ es inyectiva (es estrictamente creciente) y finalmente $2\ln(17-x_1) \neq 2\ln(17-x_2)$.
   Para ver que f es sobreyectiva, dado $y \in \mathbb{R}$ queremos encontrar $x \in D$ con $f(x)=y$.
   Si $2\ln(17-x)=y \Rightarrow \ln(17-x)=\frac{y}{2} \Rightarrow 17-x=e^{\frac{y}{2}}$ y finalmente $x=17-e^{\frac{y}{2}}$. Este despeje se puede realizar para todo $y \in \mathbb{R}$ por lo tanto $\mathbb{R}=Imf$ y f es sobreyectiva.
   Como f es inyectiva y sobreyectiva es biyectiva. La expresión de su inversa es $f^{-1}(y)=17-e^{\frac{y}{2}}$.
3. Veamos que $f\circ f^{-1}=Id_{\mathbb{R}}$ y $f^{-1}\circ f=Id_D$.
   - $f\circ f^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=f(17-e^{\frac{x}{2}})=2\ln(17-(17-e^{\frac{x}{2}}))=2\ln(e^{\frac{x}{2}})=2\frac{x}{2}=x$.
   - $f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(2\ln(17-x))=17-e^{\frac{2\ln(17-x)}{2}}=17-e^{\ln(17-x)}=17-(17-x)=x$

Ejercicio 2 *(10 puntos) Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-14x^2+72}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$
2. $\lim\limits_{x\to 4}\log\left(17-x^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{x-4}\right)$

Solución :

1. $\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-14x^2+72}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 3} \frac{(2x^3-14x^2+72)}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(2x^2-8x-24)}{x-3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})$
$= \lim_{x\to 3}(2x^2-8x-24)(\sqrt{x}+\sqrt{3}) = -60\sqrt{3}$

2. $\lim_{x\to 4} \log\left(17-x^2\right)\sin\left(\frac{1}{x-4}\right)$

   $\lim_{x\to 4} \log\left(17-x^2\right) = 0$ y como la función $\sin(x)$ está acotada entre -1 y 1, $\sin\left(\frac{1}{x-4}\right)$ está acotado entre -1 y 1 $\forall x$. Por lo tanto, $\lim_{x\to 4} \log\left(17-x^2\right)\sin\left(\frac{1}{x-4}\right) = 0$

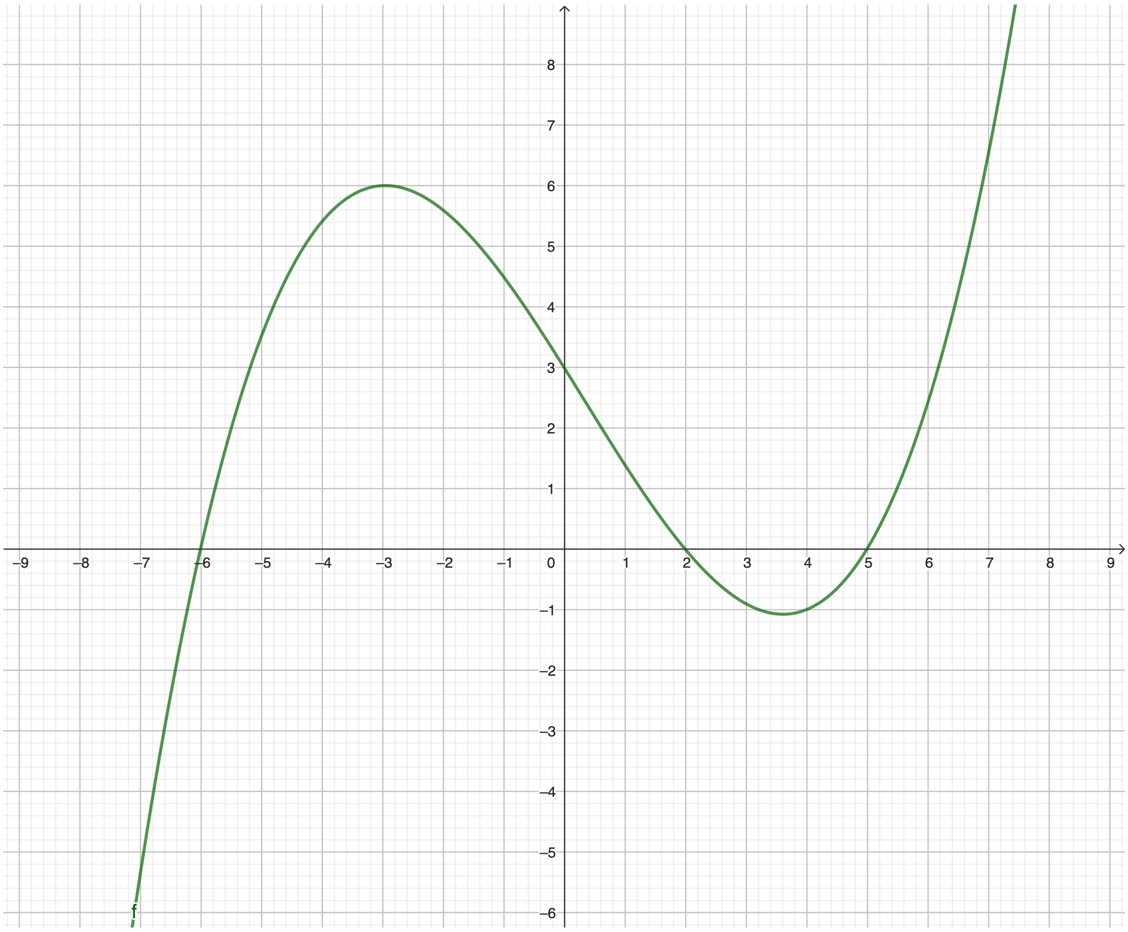
Ejercicio 3 *(10 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=e^x(4x^5-3x+4)$.*

1. *Hallar $f'(x)$, la función derivada de $f(x)$.*
2. *Hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto (0,4).*

Solución:

1. $f'(x) = e^x(4x^5-3x+4) + e^x(20x^4-3) = e^x(4x^5+20x^4-3x+1)$
2. La pendiente de la recta es $f'(0) = e^0(4\cdot 0^5 + 20\cdot 0^4 - 3\cdot 0 + 1) = 1$. Sabemos que la recta debe pasar por el punto (0,4), por lo tanto, debe cumplir $4 = f'(0)\cdot 0 + n$, por lo tanto $n = 4$ y la recta tangente al gráfico en el punto (0,4) es $y = x + 4$.

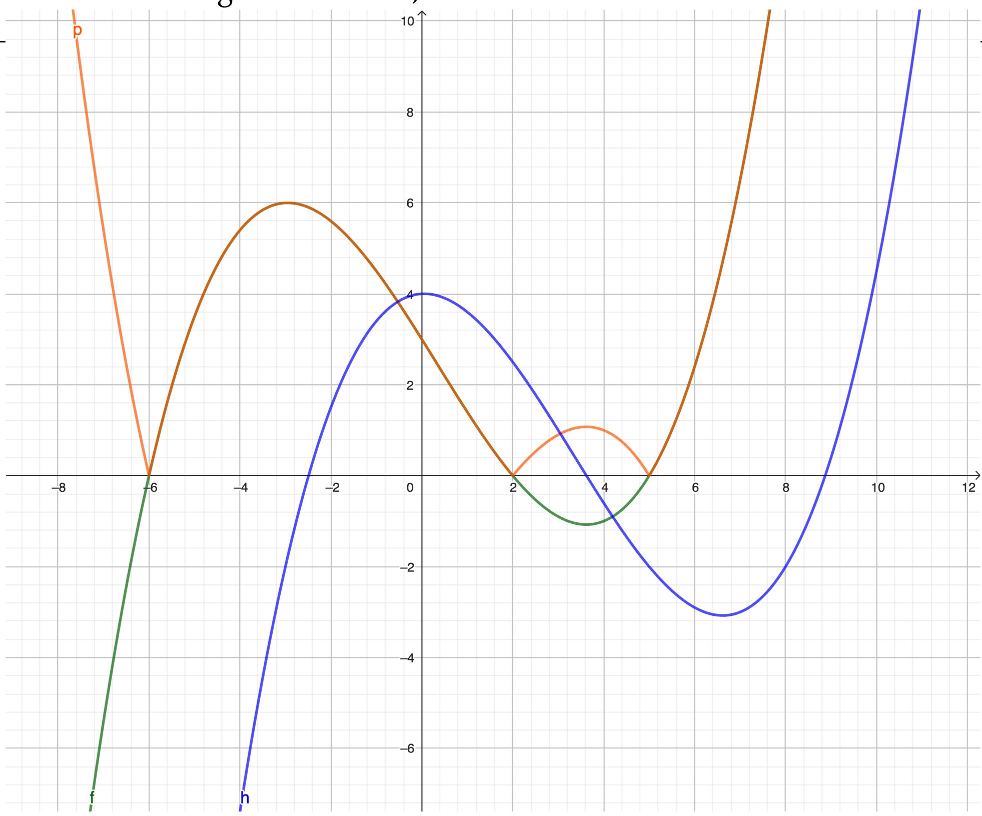
Ejercicio 4 *(15 puntos) Considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por el gráfico que se muestra a continuación:*



1. *Hallar las raíces de f.*
2. *¿Cuántos elementos tiene el conjunto de preimágenes de $\{2\}$? Justifique su respuesta.*
3. *Encontrar un intervalo donde poder aplicar el Teorema de Bolzano a la función f. Justificar verificando que se cumplen las hipótesis del teorema en dicho intervalo.*
4. *Ordenar de menor a mayor las siguientes derivadas: $f'(-5), f'(-3), f'(0), f'(3)$ y $f'(4)$. Justifique.*
5. *Bosquejar los gráficos de las siguientes funciones:*
   a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = f(x-3) - 2$.
   b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $h(x) = |f(x)|$.

Matemática Inicial

Segundo Parcial, 30 de noviembre de 2024.



Solución:

1. Las raíces de f son $-6, 2$ y 5.

2. El conjunto de preimágenes de $\{2\}$ tiene 3 elementos. Uno se encuentra en el intervalo $(-6,-5)$, otra en el intervalo $(0,1)$ y la otra en el intervalo $(5,6)$.

3. La función es continua en $\mathbb{R}$ por lo tanto lo va a ser en cualquier intervalo cerrado. Basta encontrar un intervalo $[a,b]$ para el cual $f(a).f(b) < 0$. Por ejemplo si consideramos el intervalo $[-2,3]$ vemos que $f(-2) > 0$ y $f(3) < 0$ y se puede aplicar el Teorema.

4. Observando las pendientes de las rectas tangentes a las gráficas en los distintos puntos vemos que $f'(4) < f'(-5)$ y ambas son positivas, $f'(-3) = 0$ y $f'(0) < f'(3)$ y son negativas. Por lo tanto, $f'(0) < f'(3) < f'(-3) < f'(4) < f'(-5)$

5.
   a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x-3) - 2$ está graficada en color azul.

   b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |f(x)|$ está graficada en color anaranjado. Parte se superpone con $f(x)$, por lo tanto se ve en color arananjado más oscuro.