

SEGUNDO PARCIAL – VIERNES 29 DE NOVIEMBRE DE 2024

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El parcial dura 3 horas.
- En cada ejercicio se indica la cantidad de puntos que le corresponden. Hay 5 ejercicios de múltiple opción de 5 puntos cada uno y 3 ejercicios de desarrollo. El parcial es de 60 puntos en total.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- Cada respuesta incorrecta en los ejercicios de múltiple opción resta 1 punto. Preguntas sin contestar suman 0 puntos. En cada ejercicio de múltiple opción hay una sola opción correcta.
- Escribir nombre y cédula en todas las hojas que se entreguen.

EJERCICIOS DE MÚLTIPLE OPCIÓN

5 ejercicios, 25 puntos totales.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5

Ejercicio 1.(5 pts.)

Se consideran las siguientes afirmaciones sobre conjuntos en \mathbb{R}^n :

- (1) La unión de conjuntos abiertos es abierta.
- (2) La unión de un número arbitrario de conjuntos cerrados es cerrado.
- (3) La intersección de un número arbitrario de conjuntos abiertos es abierta.
- (4) La intersección de conjuntos cerrados es cerrada.
- (5) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en K , y K es un conjunto compacto, entonces existe $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ y además $x \in K$.

Indicar la opción correcta:

- A) Solamente las opciones (2) y (3) son correctas.
- B) Solamente las opciones (1) y (4) son correctas.
- C) Solamente la opción (5) es correcta.
- D) Todas las afirmaciones son correctas.

Ejercicio 2.(5 pts.) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(2x + y^2)$, y P el plano tangente al gráfico de f en el punto $(0, 0, 0)$:

Indicar la opción correcta:

- A) $(1, 0, 2) \in P$.
- B) $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2t, y = 0, z = -t, t \in \mathbb{R}\}$.
- C) La ecuación del plano P es: $z = 2x \cos(2x + y^2)$.
- D) $(0, 2, 2) \in P$.

Ejercicio 3.(5 pts.) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como: $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

Entonces:

- A) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.
- B) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{1}{4}$.
- C) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}$.
- D) No existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Ejercicio 4.(5 pts.) Se consideran las funciones:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y) = (x, y, x^2 + y^3) \quad g(x, y, z) = (x, 1, e^z)$$

Entonces, $d(g \circ f)_{(1,1)}(1, 0)$ es:

- A) $(1, 0, 2xe^{x^2+y^3})$.
- B) $(1, 0, 2e^2)$.
- C) $(1, 0, 2xe^z)$.
- D) $(1, 0, 1)$.

Ejercicio 5.(5 pts.) Se considera

$$A = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right] dx,$$

donde se supone que existen todas las integrales que aparecen. Entonces:

- A) La región de integración es el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ y $A = \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right] dy$.
- B) La región de integración es el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ y $A = \int_0^1 [F(y) - F(y^2)] dy$, donde $F(y)$ es una primitiva de la función $f(0, y)$.
- C) La región de integración es $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq x\}$ y $A = \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right] dy$.
- D) La región de integración es $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], x^2 \leq y \leq x\}$ y $A = \int_0^1 [F(y) - F(y^2)] dy$, donde $F(y)$ es una primitiva de la función $f(1, y)$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO
3 ejercicios, 35 puntos totales.

Ejercicio 1 (15 pts.) Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \forall y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(1) Probar que f no es continua en $(0, 0)$.

(2) Estudiar la existencia de $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$.

Ejercicio 2 (10 pts.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que si f es diferenciable en el punto a , entonces f es continua en el punto a .

Ejercicio 3 (10 pts.) Calcular $\iint_R xy(x + y) dx dy$, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$.