Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables.**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Noviembre 2024**

SEGUNDO PARCIAL – VIERNES 29 DE NOVIEMBRE DE 2024

EJERCICIOS DE MÚLTIPLE OPCIÓN
5 ejercicios, 25 puntos totales.

Versión	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
1	B	A	D	B	C
2	A	D	C	D	C

Ejercicio 1.

Ver notas del curso.

Solamente las opciones (1) y (4) son correctas.

Ejercicio 2.

La derivada parcial de f con respecto a x es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(2x+y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(2x+y^2) = \cos(2x+y^2)\cdot 2.$$

En particular, en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \cos(0)\cdot 2 = 2.$$

La derivada parcial de f con respecto a y es:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(2x+y^2)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(2x+y^2) = \cos(2x+y^2)\cdot 2y.$$

En particular, en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \cos(0)\cdot 2\cdot 0 = 0.$$

El plano tangente al gráfico de f en $(0,0,0)$ está dado por:

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0).$$

Sustituyendo los valores calculados:

$$z = 0 + 2x + 0\cdot y = 2x$$

Por lo tanto, se verifica que

$$(1,0,2)\in P.$$

Ejercicio 3.

Observar que $\lim_{x\to 0} f(x,mx) = 0$ y $\lim_{x\to 0} f(x^2,x) = 1/2$ y por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ no existe.}$$

Ejercicio 4.

La regla de la cadena establece que:

$$\mathrm{d}(g \circ f)_{(1,1)} = \mathrm{d}g_{f(1,1)} \circ \mathrm{d}f_{(1,1)}.$$

Esto equivale al producto de matrices:

$$\mathrm{J}(g \circ f)_{(1,1)} = \mathrm{J}g_{(1,1,2)} \cdot \mathrm{J}f_{(1,1)}.$$

Multiplicamos las matrices:

$$\mathrm{J}g_{(1,1,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{J}f_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

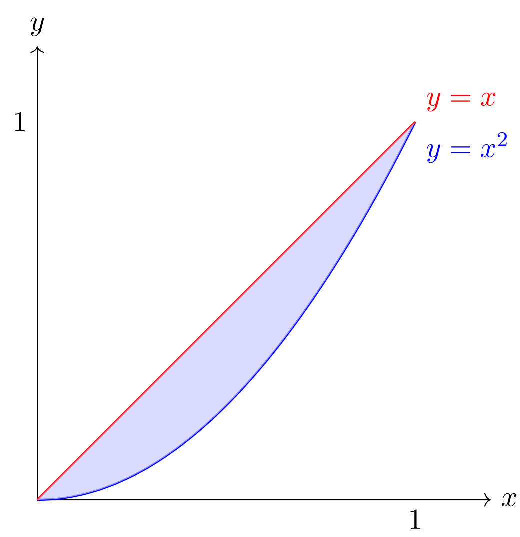
El producto es:

$$\mathrm{J}(g \circ f)_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2e^2 & 3e^2 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, evaluamos:

$$\mathrm{d}(g \circ f)_{(1,1)}(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2e^2 & 3e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5.



La región de integración es $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], x^2 \leq y \leq x\}$ y $A = \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right] dy$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO
3 ejercicios, 35 puntos totales.

Ejercicio 1

(1) Observar que $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$ y $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$ en consecuencia

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ no existe.}$$

Por lo tanto f no es continua en $(0,0)$.

(2) Estudiemos la existencia de $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para todo $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, con $v \neq 0$, considerando los siguientes casos:

(a) Si $a = 0$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, 0+bh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(b) Si $a \neq 0$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+ah, 0+bh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ah,bh)}{h} = \frac{b}{a} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.$$

Por lo tanto, si $b = 0$, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$. Sin embargo, si $b \neq 0$, la expresión $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ no existe.

En conclusión, esta función solo tiene derivadas direccionales en $(0,0)$ en las direcciones canónicas.

Ejercicio 2

Ver notas del curso Teorema 7.13.

Ejercicio 3

Primero, desarrollamos el integrando:

$$xy(x+y) = x^2y + xy^2.$$

Por lo tanto,

$$\iint_R xy(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2y + xy^2\,dx \right) dy.$$

Evaluamos primero la integral interna respecto a x y luego respecto a y :

$$\iint_R xy(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} dy = \frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$