Soluciones Práctico 9: Derivadas

Ejercicio 1 (Recta tangente) *1. Indicar los valores de m y n de la recta $y = mx + n$ tangente a la función f en el punto $P = (a, f(a))$ (asumiendo que existe).*

Solución:

De la ecuación de la recta tangente $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ deducimos que $m = f'(a)$ y $n = -af'(a)+f(a)$

2. *Calcular la pendiente m de la recta tangente para las siguientes funciones en los puntos indicados:*

   a) $f(x) = 3x+4$ *en* $(1,7)$.
   Solución: $m = 3$ *y* $n = 4$

   b) $f(x) = 4x^2 - 3x$ *en* $(-1,7)$.
   Solución: $m = -11$ *y* $n = -4$

   c) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ *en* $(-1,0)$.
   Solución: $m = 4$ *y* $n = 4$

   d) $f(x) = \frac{6}{x+1}$ *en* $(2,2)$.
   Solución: $m = -2/3$ *y* $n = 10/3$

Ejercicio 2 (Derivada en un valor) *Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones en el número dado:*

1. $f(x) = 1 - 3x^2$ *en 2.*

   Solución:
   $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1-3x^2+11}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} -3(x+2) = -12$

2. $f(x) = 2 - 3x + x^2$ *en -1.*

   Solución:
   $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2-3x+x^2-6}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} x-4 = -5$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *en 4.*

   Solución:
   $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}}{x-4} = -\frac{1}{16}$

4. $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ *en 4.*

   Solución: $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1+2\sqrt{x}-5}{x-4} = \frac{1}{2}$

Ejercicio 3 (Función derivada) *Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = x^n$ *con* $n \in \mathbb{N}$.

   Solución:
   $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} x^{n-1} + ax^{n-2} - a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1} = na^{n-1}$ *por lo tanto* $(x^n)' = nx^{n-1}$

2. $f(x) = \sqrt{x}$.

   Solución:
   $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ *por lo tanto* $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ *con* $n \in \mathbb{N}$.

   Solución:
   $\lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{1}{x^n}-\frac{1}{a^n}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{a^n-x^n}{x^na^n}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{-(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})}{x^na^n} = \frac{na^{n-1}}{a^{2n}} = -\frac{n}{a^{2n-n+1}}$ *por lo tanto* $(\frac{1}{x^n})' = \frac{-n}{x^{n+1}}$

4. $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

   Solución:
   $\lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{x}{x+1}-\frac{a}{a+1}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{x-a}{(x+1)(a+1)}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{(x+1)(a+1)} = \frac{1}{(a+1)^2}$ *por lo tanto* $(\frac{x}{x+1})' = \frac{1}{(x+1)^2}$

Ejercicio 4 *Si una flecha es disparada hacia arriba en la Luna con una velocidad de* $58m/s$*, su altura (en metros) después de t segundos está dada por* $H = 58t - 0{,}83t^2$.

1. *Hallar la velocidad instantánea de la flecha después de un segundo.*

   Solución:

   La derivada de $H(t)$ *es igual a* $H'(t) = 58 - 1,66t$ *por lo que* $H'(1) = 56,34$

2. *¿En qué tiempo t regresará la flecha a la Luna?*

   Solución:

   La flecha regresa a la luna cuando $H(t) = 0$ *es decir cuando* $58 - 0,83t = 0$*, o después de* $t = \frac{58}{0,83} \approx 69,87$ *segundos.*

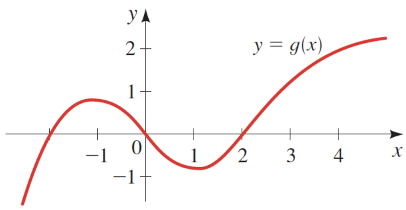
3. *¿Con qué velocidad llegará la flecha a la Luna?*

   Solución

   La velocidad será también de $58 m/s$ *(Más allá de las cuentas: ¿por qué?)*

Ejercicio 5 (Estimación gráfica de derivadas) *Para la función* g *cuya gráfica es la que se muestra a continuación, ordenar los siguientes valores en orden creciente justificando la respuesta.*

$$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(1) \quad g'(2) \quad g'(4)$$



Solución:

$$g'(0) < 0 = g'(1) < g'(4) < g'(2) < g'(-2)$$

Ejercicio 6 (Existencia derivada) *Determinar en qué puntos es derivable la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = |x|$*. En caso de existencia, calcular* $f'(a)$*.*

Solución:

La función $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ *es derivable para todo* $x \neq 0$*. Solo resta ver lo que pasa en* $x = 0$*:*

Como $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$ *y* $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$ *concluimos que no existe la derivada de* f *en* $x = 0$*.*

Observación: en lo que sigue se aceptan como conocidas las siguentes derivadas:

- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$
- $\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$

Ejercicio 7 (Operaciones y derivada) *Recordar las siguientes propiedades de la derivada (en caso de que exista):*

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g^2(x)}(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))$

1. **Derivada de una combinación lineal** *Calcular la derivada de las siguientes funciones:*

   a) $f(x) = x^{27} - 15x^{10} + 7x^3 - 3.$
   Solución:
   $f'(x) = 27x^{26} - 150x^9 + 21x^2$

   b) $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^3}.$
   Solución:
   $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^2} + \frac{18}{x^4}$

2. **Derivada del producto** *Calcular la derivada de las siguientes funciones:*

   a) $f(x) = x^3e^x.$
   Solución:
   $f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x$

   b) $f(x) = x\ln(x) - x.$
   Solución:
   $f'(x) = \ln(x)$

   c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x).$
   Solución:
   $f'(x) = -\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$

   d) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x).$
   Solución:
   $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)$

3. **Derivada del cociente** *Calcular la derivada de las siguientes funciones:*

   a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}.$
   Solución:
   $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 4\frac{1}{x^3} - 27\frac{1}{x^4}$

   b) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$
   Solución:
   $f'(x) = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$

   c) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1}.$
   Solución:
   $f'(x) = \frac{(2x+3)(x^4+x^2+1)-(x^2+3x+2)(4x^3+x^2+1)}{(x^4+x^2+1)^2}$

   d) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}.$
   Solución:
   $f'(x) = \frac{\cos(x)\sqrt{x} - \operatorname{sen}(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

Ejercicio 8 (Derivada de la composición - regla de la cadena) *Se consideran las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 5$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^x$.*

1. *Hallar $F : F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))\ \ \forall x \in R$ y $G : G(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))\ \ \forall x \in R$*
   Solución:
   $F(x) = f(g(x)) = f(e^x) = e^{2x} + 5$
   $G(x) = g(f(x)) = g(x^2+5) = e^{x^2+5}$

2. *Calcular $F'(x)$ y $G'(x)$ $\forall x \in R$ usando la regla de la cadena y compruebe el resultado obtenido derivando directamente*

   Solución:

   $F'(x) = f'(g(x))g'(x) = f'(e^x)(e^x)' = 2e^x e^x = 2e^{2x}$

   $G'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(x^2+5)2x = e^{x^2+5}2x$

Ejercicio 9 (Operaciones y derivada) *Hallar f' en función de g y g' para los siguientes ejemplos:*

1. $f(x) = g(x) + (x-a)$

   Solución:

   $f'(x) = g'(x) + 1$

2. $f(x) = g(x)(x-a)$

   Solución:

   $f'(x) = g'(x)(x-a) + g(x)$

3. $f(x) = g(a)(x-a)$

   Solución:

   $f'(x) = g(a)$

4. $f(x) = g(x + g(a))$

   Solución:

   $f'(x) = g'(x + g(a))$

5. $f(x) = g(xg(a))$

   Solución:

   $f'(x) = g'(xg(a))g(a)$

6. $f(x) = g(x + g(x))$

   Solución:

   $f'(x) = g'(x + g(x))(1 + g'(x))$

7. $f(x+3) = g(x^3)$

   Solución:

   $f'(x) = g'((x-3)^3)3(x-3)^2$

8. $f(x^3) = g(x + g(x))$

   Solución:

   $f'(x) = \frac{1}{3}g'(x^{1/3} + g(x^{1/3}))(1 + g'(x^{1/3}))x^{-2/3}$

Ejercicio 10 (Regla de la cadena)

1. *Sean $f : f(x) = \ln(x)$ y $g : R \to R$ tal que $g(1) = 6$ y $g'(1) = 2$. Halle usando la regla de la cadena la derivada de $F : F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ en $x = 1$.*

   Solución:

   $F'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(6) \times 2 = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$

2. *Sean $f : f(x) = e^{3x}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(2) = 0$ y $g'(2) = 4$. Halle usando la regla de la cadena la derivada de $F : F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ en $x = 2$.*

   Solución:

   $F'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(0) \times 4 = 3 \times 4 = 12.$

Ejercicio 11 (Regla de la cadena) *Calcular la derivada de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

   Solución:

   $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}e^{\frac{1}{x^2+1}}$

2. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+2})$

   Solución:

   $f'(x) = \frac{x}{x^2+2}$

3. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$

   Solución:

   $f'(x) = \cos\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)\frac{-\operatorname{sen}(x)x - \cos(x)}{x^2}$

4. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

   Solución:

   $f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}$

Ejercicio 12 (Derivada y crecimiento) *Las funciones de la figura 2 son las derivadas de las funciones de la figura 1 en desorden. Indicar cuál es la derivada correspondiente de cada función.*

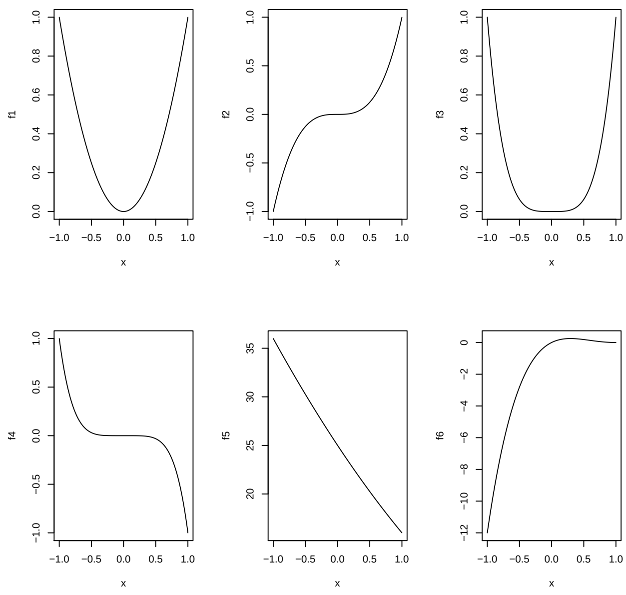


Figura 1: Funciones.

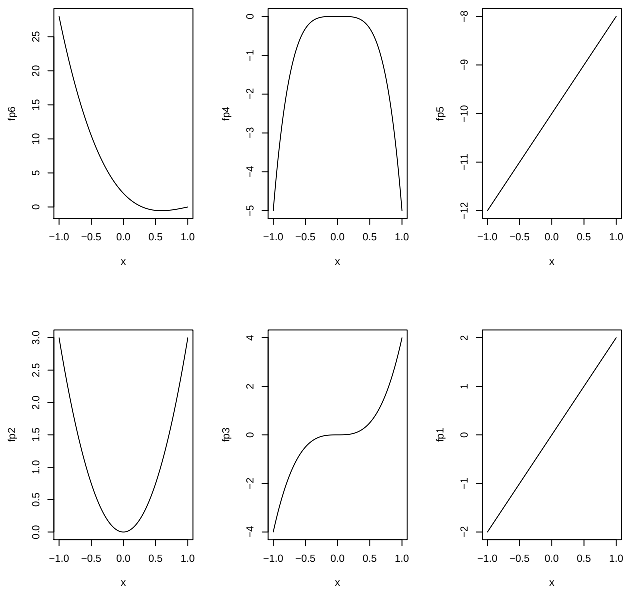


Figura 2: Derivadas.

Solución

Figura 1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Figura 2	*6*	*4*	*5*	*2*	*3*	*1*

Ejercicio 13 (Identificación gráfica de extremos) *Usando la gráfica de la función, determinar:*

1. *los valores críticos;*
2. *los extremos absolutos y relativos y donde se alcanzan.*

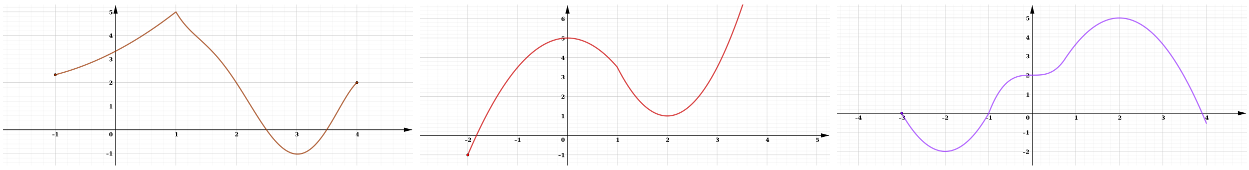


Figura 3: Identificación gráfica de extremos

Solución:

a) *El punto crítico (donde la derivada se anula) de la gráfica de la izquierda es $x = 3$.*

Los extremos absolutos se presentan en $x = 1$ y en $x = 3$. Los extremos relativos se presentan en $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ y en $x = 4$.

b) *Los puntos críticos (donde la derivada se anula) de la gráfica del medio son $x = 0$ y $x = 2$.*

Los extremos absolutos se presentan en $x = -3$ y en $x = 3{,}5$. Los extremos relativos se presentan en $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$ y $x = 3{,}5$.

c) *Los puntos críticos (donde la derivada se anula) de la grafica de la derecha son $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.*

Los extremos absolutos se presentan en $x = -2$ y en $x = 2$. Los extremos relativos se presentan en $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 4$.

Ejercicio 14 (Crecimiento y extremos) *Dada la gráfica de una cierta función que se muestra a continuación, estimar:*

1. *los intervalos de crecimiento y decrecimiento,*
2. *donde se alcanzan los máximos y mínimos relativos,*
3. *puntos de cortes con los ejes,*
4. *dominio de la función.*

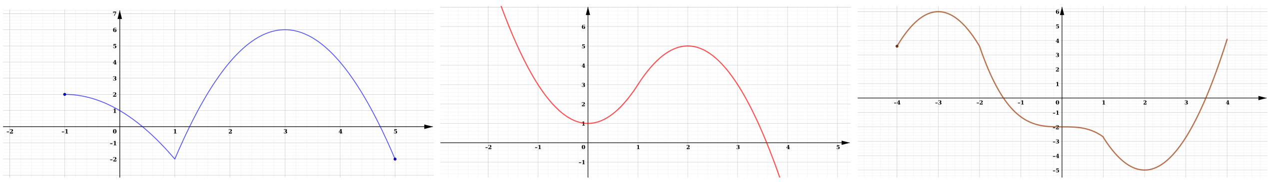


Figura 4: Crecimiento y extremos

a) *La función es creciente en $[1,3]$ y decreciente en $[-1,1] \cup [3,5]$. Los máximos y mínimos absolutos (y relativos) se presentan en $x = 1$ y en $x = 3$ (no son absolutos), también se presentan extremos relativos en $x = -1$ y $x = 5$. Los puntos de corte con el eje $(0x)$ se dan en $x = 0{,}5$, $x = 1,25$ $x = 4,75$ aproximadamente y el punto de corte con el eje $(0y)$ se da en $y = 1$. El dominio de la función es $[-1,5]$.*

b) *La función es creciente en $[0,2]$ y decreciente en $[-\infty,0] \cup [2,+\infty]$. Los máximos y mínimos relativos se presentan en $x = 0$ y en $x = 2$. El punto de corte con el eje $(0x)$ en $x = 3,5$ aproximadamente y el punto de corte con el eje $(0y)$ en $y = 1$. El dominio de la función es $\mathbb{R}$.*

c) *La función es creciente en $[-4,-3] \cup [2,4]$ y decreciente en $[-3,2]$. Los máximos y mínimos relativos se presentan en $x = -3$ (máximo absoluto), en $x = 2$ (mínimo absoluto) y en $x = -4$. Los puntos de corte con el eje $(0x)$ en $x = -1,5$ y en $x = 3,5$ aproximadamente y el punto de corte con el eje $(0y)$ en $y = -2$. El dominio de la función es $[-4,4)$.*