8. Se considera la ecuación:

$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{para todo } (x,t) \in (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0 \text{ y } u_x(\pi,t) = 0 & \text{para todo } t > 0, \\ u(x,0) = x & \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,+\infty) \text{ y continua en } [0,\pi]\times(0,+\infty). \end{cases}$$

Hallar una candidata a solución, verificando que efectivamente lo es, de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t).$$

Sugerencia: Revisar ejercicio 5 del práctico 6

Recordar ej 5 práctico 6

5. Se considera la ecuación:

$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{para todo } (x,t) \in (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0 \text{ y } u_x(\pi,t) = 0 & \text{para todo } t > 0, \\ u(x,0) = x & \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,+\infty) \text{ y continua en } [0,\pi]\times(0,+\infty). \end{cases}$$

Buscando soluciones de la forma $X(x)T(t)$ hallar una candidata a solución de $(*)$ de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t).$$

Observación: Si $u_n(x,t) = X(x)T(t)$, la condición $u_x(0,t) = 0$ implica $X'(0) = 0$ y $u_x(\pi,t) = 0$ implica $X'(\pi) = 0$.

Variables separables: $u(x,t) = X(x).T(t)$

para satisfacer $(*)$ $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \mu \text{ (cte)}$$

una función dependiente sólo de x = a una función dep. sólo de t sii son una cte.

CB: 1. $u_x(0,t) = 0$ 2. $u_x(\pi,t) = 0$

$u_x(x,t) = X'(x).T(t)$

1. $u_x(0,t) = X'(0).T(t) = 0 \quad \forall t > 0$

si $T(t) = 0 \longrightarrow u(x,t) = 0$ no sirve

$\Rightarrow \boxed{X'(0) = 0}$

2. $u_x(\pi,0) = X'(\pi).T(t) = 0 \longrightarrow T(t) \neq 0$ análogo

$\Rightarrow \boxed{X'(\pi) = 0}$

CASO $\mu > 0$

$X''(x) - \mu X(x) = 0$

polinom: $\lambda^2 - \mu = 0 \longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\mu}$

$X(x) = Ae^{\sqrt{\mu}x} + Be^{-\sqrt{\mu}x}$

$X'(x) = \sqrt{\mu}Ae^{\sqrt{\mu}x} - B\sqrt{\mu}e^{-\sqrt{\mu}x} \longrightarrow$ A y B con CB

$X'(0) = 0 \Leftrightarrow A\sqrt{\mu} - B\sqrt{\mu} = 0 \Leftrightarrow A = B$

$X'(\pi) = 0 \Leftrightarrow A\sqrt{\mu}\exp(\sqrt{\mu}\pi) - B\sqrt{\mu}\exp(-\sqrt{\mu}\pi) = 0$

$$A\sqrt{\mu}\,(\underbrace{e^{\sqrt{\mu}\pi} - e^{-\sqrt{\mu}\pi}}_{\neq 0}) = 0$$

$\Rightarrow A\sqrt{\mu} = 0 \longrightarrow A = 0,\ B = 0$

solución trivial

CASO $\mu = 0$

$X''(x) = 0 \rightarrow X'(x) = A \rightarrow X(x) = Ax + B$
$X'(0) = A = 0$
$X'(\pi) = A = 0 \qquad \Rightarrow X(x) = B \quad (cte)$

$u(x,t) = B \cdot C = \overline{D}$

Además : $\frac{T'(t)}{T(t)} = 0 \rightarrow T'(t) = 0$
$T(t) = C \quad (cte)$

CASO $\mu < 0$

$X'' - \mu X = 0$

polinomio : $\lambda^2 - \mu = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\mu}$

tomo $\mu = -\alpha^2$, $\alpha > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \pm \alpha i \\ \text{im. puro} \end{array} \right.$

$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\,\text{sen}(\alpha x)$

$X'(x) = -\alpha A\,\text{sen}(\alpha x) + \alpha B\cos(\alpha x)$

1. $X'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha B = 0 \Leftrightarrow B = 0$
   $(\mu \neq 0, \alpha \neq 0)$

2. $X'(\pi) = 0 \Leftrightarrow -\alpha A\,\text{sen}(\alpha\pi) = 0$
   - $A = 0$ (no me sirve)
   - $\text{sen}(\alpha\pi) = 0 \Leftrightarrow \alpha\pi = k\pi \Leftrightarrow \underline{\alpha = k}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\mu = -\alpha^2 = -k^2$

$\boxed{X(x) = A_k \cos(kx)}$

$\frac{T'(t)}{T(t)} = \mu \rightarrow T(t) = Ce^{\mu t}$

$\boxed{T(t) = Ce^{-k^2 t}}$

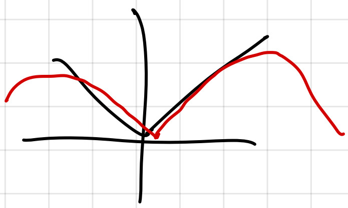
$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$A_k \cdot C = \overline{A_k}$

$u(x,t) = \overline{A_k}\cos(kx) \cdot e^{-k^2 t}$

si $k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow$ Tengo soluciones distintas

$$u(x,t) = \begin{cases} \overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2 t} & k \geq 1 \quad (\mu \text{ positivo}) \\ \overline{D} & k = 0 \quad (\mu = 0) \end{cases}$$



para cumplir con la condición $u(x,0) = x$
considero la serie de los posibles soluciones.

CANDIDATA : $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2 t} + \overline{D}$

$\overline{A_k}$, $\overline{D}$ las intento determinar con la condición inicial.

$u(x,0) = x$
- se parece a una serie de Fourier
- si elijo bien los coeficientes de Fourier puedo reconstruir $u(x,0)$ con la serie.

cuando sustituyo $t=0$ $u(x,0)$ se parece a Fourier

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k} \cos(kx) + \overline{D} \qquad \overline{D} = \frac{A_0}{2} \qquad x \in [0,\pi]$$

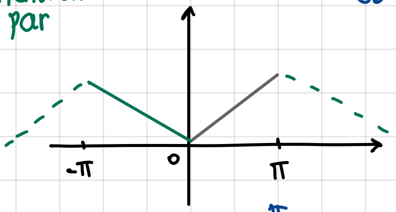
coeficiente de Fourier de los términos de coseno

$\overline{A_k} = \langle f, \cos \rangle$
par . par = par
$\neq 0$

$B_k = \langle f. \text{sen} \rangle$
par . impar = impar
$= 0$

tengo que hacerle la extensión par para obtener los términos en coseno.

Extensión par



intervalo $[-\pi, \pi]$

$$\overline{A_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) = \frac{2}{\pi} \left[\overset{=0}{\frac{\text{sen}(kx)}{k}\, x \Big|_0^{\pi}} - \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(kx)}{k}\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[- \frac{(-\cos(kx))}{k^2} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2} \right]$$

$$\overline{A_k} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2} \right]$$

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

sustituyo en la candidata a solución y obtengo :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2} \right] \cos(kx)\, e^{-k^2 t} + \frac{\pi}{2}$$

8. Se considera la ecuación:

$$(*) \begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{para todo } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0 \text{ y } u_x(\pi,t) = 0 & \text{para todo } t > 0, \\ u(x,0) = x & \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi) \times (0,+\infty) \text{ y continua en } [0,\pi] \times (0,+\infty). \end{cases}$$

Hallar una candidata a solución, verificando que efectivamente lo es, de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t).$$

Sugerencia: Revisar ejercicio 5 del práctico 6

para concluir que es efectivamente una solución, tengo que chequear todas las condiciones de $(*)$

8. Se considera la ecuación:

$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad \text{para todo } (x,t) \in (0,\pi)\times(0,+\infty), & (I) \\ u_x(0,t) = 0 \text{ y } u_x(\pi,t) = 0 \quad \text{para todo } t>0, & (II) \\ u(x,0) = x \quad \text{para todo } x \in [0,\pi], & (III) \\ \underline{u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi)\times(0,+\infty)} \text{ y } \underline{\text{continua en } [0,\pi]\times(0,+\infty)}. & (I) \end{cases}$$

(IV) ←

Hallar una candidata a solución, verificando que efectivamente lo es, de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t).$$

Sugerencia: Revisar ejercicio 5 del práctico 6

la candidata converge en el intervalo $[0,\pi]\times(0,+\infty)$?

Es el límite de esa serie, para que la sol. ∃, la serie tiene que converger

Teorema 0.7 (**Criterio del mayorante de Weierstrass**). *Sea $f_n : M \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Si existe una sucesión A_n de números reales tal que:*

$$|f_n(x)| \le A_n, \ \forall\, x \in M, \ \forall\, n \ge 1$$

y $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ converge entonces la serie $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ converge uniformemente.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{2}{\pi}\left[\frac{\overbrace{(-1)^k}^{1}-1}{k^2}\right] \underbrace{\cos(kx)}_{\le 1}\, \underbrace{e^{-k^2 t}}_{\le 1} + \frac{\pi}{2} \right| \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{k^2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

en $[0,\pi]\times(0,+\infty)$

converge

por Mayorante de Weierstrass, la serie

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^k-1}{k^2}\right]\cos(kx)\,e^{-k^2 t} + \frac{\pi}{2}$$

converge uniformemente en el intervalo.

$u(x,t)$ es continua por ser el límite de funciones continuas

$$\left[\begin{matrix} f_n \xrightarrow{c.u} f = u \text{ solución} \\ \text{y } f_n \text{ continua en todos los puntos} \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} f \text{ es continua} \\ \text{en todos los puntos} \end{matrix}\right]$$

u es continua en $[0,\pi]\times(0,+\infty)$ (I)

(III) $u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos(kx) + \frac{\pi}{2}$ ⟶ Pruebo que converge a $f(x) = x$ con teorema de Dini

$c.u \to c.p$ puedo evaluar en un punto

Teorema 0.3 (Dini).

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos, 2π periódica y tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que existen y son finitos los siguientes límites:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t} = L^+ \ y \ \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x+t)-f(x^-)}{t} = L^-.$$

Entonces, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$S_\infty(f)(x_0) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}.$$

Cuando f es continua los puntos $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ coinciden. Por lo tanto tenemos el siguiente corolario:

Corolario 0.6.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en las hipótesis del Teorema de Dini. Entonces $S_n(f)$ converge puntualmente a f en $\mathbb{R}$. O lo que es equivalente:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sen(kx).$$

Tengo una función continua, 2π periódica (x la extensión)
es derivable a trozos (estoy en las hipótesis del teorema de Dini)

$\Rightarrow$ x el corolario, la serie de Fourier converge puntualmente
a la función f (a la que le calculé la serie)

$\Rightarrow$ $u(x,0)$ converge puntualmente a x

(III) ✓

(II) u es de clase C^2 en $(0,\pi) \times (0,+\infty)$

$\downarrow$

derivada continua

¿u es derivable?

$$\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{c.u} f \\ f_n' \xrightarrow{c.u} g \end{array}\right\} \begin{array}{l} f \text{ es derivable} \\ y\ f' = g \end{array}$$

Proposición 0.3 (Derivada respecto de t).

Sea $S_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(t,x)$. Si: parcial

1. • *$S_n(t,x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t,x)$.*
2. • *$S_{n_t}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} U_k(t,x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t,x)$.*

Es derivable

Entonces:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t,x).$$ $\longrightarrow$ puedo pasar la derivada para adentro

① ya calculé que $S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \overline{A_k} \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2$

converge uniformemente x mayorante de Weierstrass

② tengo que pasar la derivada para adentro y ver si converge unif.

$$S_{n_t}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2 t} + \pi/2\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\underbrace{-k^2}\,\overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2 t}\right]$$

molesta porque hace diverger

la vez anterior no aparecía

Ahora tengo que probar que c.u

Si aplico M. Weierstrass

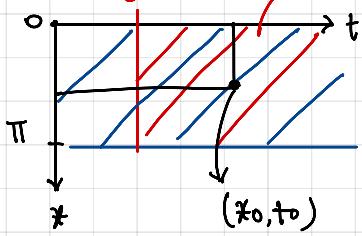
$$\sum_{k=1}^{n} \left| \underbrace{-k^2 \overline{A_k}}_{\leq M} \underbrace{\cos(kx)}_{\leq 1} e^{-k^2 t} \right| \leq 1 \qquad [0,+\infty)$$

converge

si lo acoto con $t=0$ (≤ 1) este término desaparece y el k^2 hace que sea divergente

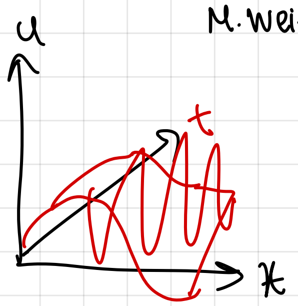
En el intervalo $(0,\pi) \times [0,+\infty)$ puede divergir pero si cambio el dominio puedo hacerla converger

$D' = (0,\pi) \times (\delta,+\infty)$



¿$Sn_t(x,t)$ converge en D'?

$$Sn_t(x,t) = \sum_{k=1}^{n} -k^2 \overline{A_k} \cos(kx) e^{-k^2 t}$$



M. Weierstrass: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left| -k^2 \overline{A_k} \cos(kx) e^{-k^2 t} \right| \leq k^2 |M| e^{-k^2 \delta}$

$e^{-\alpha}$ es máximo cuando α es mínimo

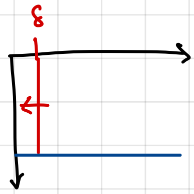
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{-k^2 \delta} \longrightarrow \text{x órdenes } e^{-k^2\delta} \text{ pesa más}$$

k^2: diverge

$e^{-k^2\delta}$: converge (<1)

x M. Weierstrass concluyo que $Sn_t(x,t)$ converge unif en D'

Tomo δ tan chico (cercano a cero) como quiera.



- $Sn_t(x,t)$ c.u en D'
- $Sn(x,t)$ c.u en D (en particular en D')

} x proposición 0.3

$Sn(x,t)$ es derivable

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k} \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \quad \text{es derivable}$$

y es válido $\displaystyle \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k} \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{A_k} \cos(kx) e^{-k^2 t} + \pi/2 \right]$

continua

$u(x,t)$ es derivable en (x_0,t_0) genérico y extiendo δ / $D' = (0,\pi) \times (0,+\infty)$ } Aplico otra vez y obtengo u clase C^2 en D'

Hago el mismo razonamiento para S_{n_x} y $S_{n_{xx}}$ $\left(\frac{\partial S_n}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2}\right)$

Proposición 0.4 (Derivada respecto de x).

Sea $S_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(t,x)$. Si:

- *$S_n(t,x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t,x)$.*
- *$S_{n_x}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx}U_k(t,x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}U_k(t,x)$*

Entonces:

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{d}{dx}U_k(t,x).$$

$\frac{\partial}{\partial x}\sum^{+\infty}$ $\quad \sum^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}$

Proposición 0.5 (Derivada segunda respecto de x).

Sea $S_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(t,x)$. Si:

- *$S_n(t,x)$ converge uniformemente a $\sum_{0}^{+\infty} U_k(t,x)$.*
- *$S_{n_x}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx}U_k(t,x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}U_k(t,x)$.*
- *$S_{n_{xx}}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^2}{dx^2}U_k(t,x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2}U_k(t,x)$.*

Entonces:

$$\frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d^2}{dx^2}U_k(t,x).$$

(I) $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$

$$u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2t+\pi/2}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2t+\pi/2}\right]$$

x lo anterior

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} -k^2\overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2t} \quad (1)$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2t+\pi/2}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2t+\pi/2}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} -k^2\overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2t} \quad (2)$$

(1) = (2) ✓
en $(x,t) = (0,\pi)\times(0,+\infty)$
(ahí puedo meter la derivada para adentro)

(II) $u_x(0,t) = 0$
$u_x(\pi,t) = 0$

$$u_x(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{A_k}\cos(kx)e^{-k^2t+\pi/2}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} -k\overline{A_k}\,\text{sen}(kx)e^{-k^2t}$$

- $u_x(0,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} -k\overline{A_k}\,\text{sen}(0)e^{-k^2t} = 0$
- $u_x(\pi,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} -k\overline{A_k}\,\underbrace{\text{sen}(k\pi)}_{0}e^{-k^2t} = 0$

(II) ✓