

## Práctico 9: Grafos y Matrices de Adyacencia.

Ref. ALA, JAP, Cap. V, Sección 1; – AGT, Biggs, Cap. I, Sección 2.

**Ejercicio 1** Dado un grafo  $\Delta$ , probar que la matriz  $A_\Delta$  es irreducible  $\iff \Delta$  es un grafo conexo.

**Ejercicio 2**

- Probar que todo valor propio asociado a un grafo tiene multiplicidad geométrica 1.
- Probar que si  $\Delta$  es un grafo conexo, entonces  $\rho(A_\Delta)$  es un valor propio simple.

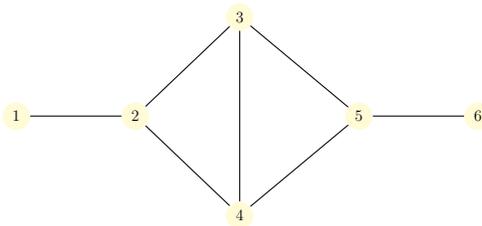
**Ejercicio 3** Sea  $\Delta$  un grafo,  $x_1 \in \Delta_0$  con  $\text{grado}(x_1) = 1$ , y sea  $x_2$  el único vecino de  $x_1$ . Sean  $\Delta_1 = \Delta \setminus \{x_1\}$ , y  $\Delta_2 = \Delta \setminus \{x_1, x_2\}$ . Probar que:  $\chi_\Delta(t) = t\chi_{\Delta_1}(t) - \chi_{\Delta_2}(t)$ .

**Ejercicio 4** Sean  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  dos grafos disjuntos, con  $x_1 \in \Delta_1$ , y  $x_2 \in \Delta_2$ . Se considera el grafo  $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ , donde se agregan además  $s$  aristas entre  $x_1$  y  $x_2$ .

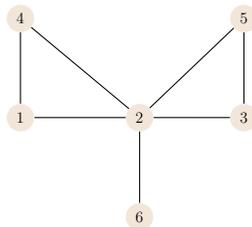
Probar que  $\chi_\Delta(t) = \chi_{\Delta_1}(t)\chi_{\Delta_2}(t) - s^2\chi_{\Delta'_1}(t)\chi_{\Delta'_2}(t)$ , donde  $\Delta'_1 = \Delta_1 \setminus \{x_1\}$  y  $\Delta'_2 = \Delta_2 \setminus \{x_2\}$ .

**Ejercicio 5** *Grafos coespectrales*

- Calcular el espectro del grafo  $\Delta$ :



- Calcular el espectro del grafo  $\Gamma$ :



- ¿Son  $\Delta$  y  $\Gamma$  grafos isomorfos?

**Ejercicio 6** Sea  $\Delta$  un grafo, y  $H \subseteq \Delta_0$ , tal que  $N(v) = N(v')$ , para todo  $v, v' \in H$ , o sea todos los vertices de  $H$  tienen el mismo conjunto de vecinos. Probar que, si  $\#H = r$ , entonces 0 es valor propio de multiplicidad, al menos,  $r - 1$ .

*Marcelo Lanzilotta*