Series de Fourier

(Una serie de funciones es una "suma infinita" de funciones. Al igual que series de números, una serie de funciones es un límite → función límite)

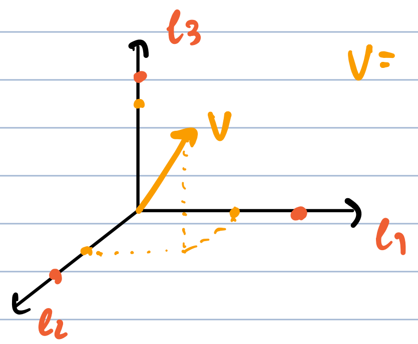
- Las series de Fourier son series de funciones en las que los sumandos son funciones trigonométricas.

→ Consideramos el espacio de funciones $V = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódicas continua a trozos $\}$

→ Resulta que V es un espacio vectorial de dim infinita y todo elemento de V se podrá escribir como una "comb. lineal infinita" de elem de una "base ortonormal".

- V tiene un prod interno natural : Si $f, g \in V$ → $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$
- La base de Fourier para V es

$$B = \{ \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos(x), \operatorname{sen}(x), \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \dots \cos(nx), \operatorname{sen}(nx), \dots \}$$



$V = \langle e_1, V \rangle . e_1 + \langle e_2, V \rangle . e_2 + \langle e_3, V \rangle e_3$

"Repaso" de GAL.

Para nosotros, la descomposición de un vector $f \in V$ en la base B consiste en hallar la "proyección ortogonal" de f en los elem de B.

↳ A estas proyecciones las llamamos coef. de Fourier.

- $a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) . dx$
- $a_n = \langle f, \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) . \cos(nx)\, dx$.
- $b_n = \langle f, \operatorname{sen}(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$

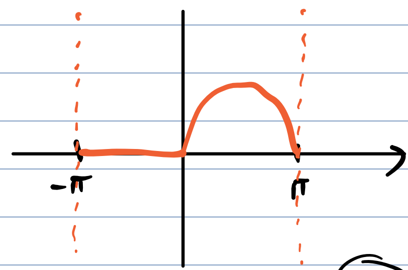
La idea es ver si se verifica que

$$\left[f(x) \overset{?}{=} \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)}_{\text{Serie de Fourier}} \right]$$

Id Parseval : $\|f\|^2 \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \sum_1^{+\infty} a_n^2 + \sum_1^{+\infty} b_n^2$

---

1) d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \le x < 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 \le x < \pi \end{cases}$



- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) dx = \frac{1}{\pi} -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}$

- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) \cos(nx) dx$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\cos(x) . \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x) . n . \operatorname{sen}(nx) dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\cos(x) \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + n \operatorname{sen}(x) . \operatorname{sen}(nx) \Big|_0^{\pi} - n^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) . \cos(nx) \right]$$

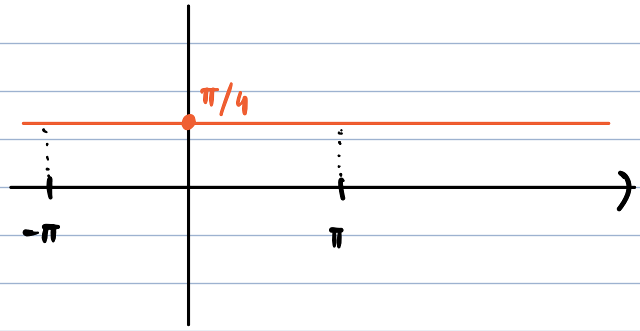
$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\left(1 (-1)^n + 1 \right) \right] - n^2 a_n .$$

$$a_n (1+n^2) = \frac{1}{\pi}((-1)^n + 1) \longrightarrow \boxed{a_n = \frac{(-1)^n + 1}{\pi(1+n^2)}}$$

- $b_n \to$ de nuevo partes.

$$\left[\text{Serie de Fourier:} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_1^{+\infty} a_n . \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right]$$

4) · Serie de Senos de la función cte $f(x) = \pi/4$.



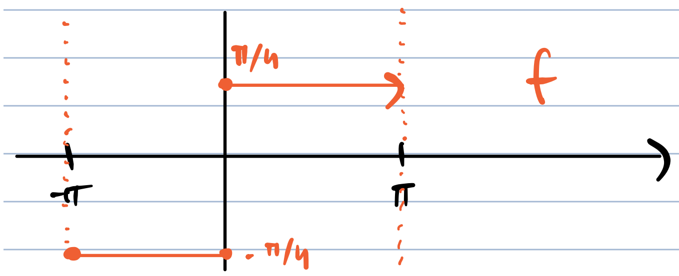
• $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi/4 \cdot \operatorname{sen}(nx) \,\_ = \frac{1}{4} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\,dx$

$= 0$.

• $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi/4 \cdot \cos(nx)\, dx = 0$.

Si considero la cte $\pi/4$, su serie de Fourier es ella misma...

Considero ahora la sig. función



Para esta función: · $a_0 = 0$.
· $a_n = 0$ (int. de func. impar)

De esta forma, esta función se expresa como

$$\left[f(x) = \sum_{1}^{+\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}(nx) \right] \text{ si } x \neq k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

en particular si $x_0 \in (0, \pi) \Rightarrow$

$$\left[f(x_0) = \frac{\pi}{4} = \sum_{1}^{+\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}(n x_0) \right)$$