Facultad de Ingeniería – Udelar

Departamento de Diseño industrial – IIMPI

MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS

CLASE N^{0} 10

COMPLEMENTOS DE LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 3D-ESTÁTICOS.

PROFESOR

Dr. Henry Figueredo Losada

Montevideo. Uruguay.
Noviembre 2019

TEMA IV. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 3D-ESTÁTICOS.

CLASE 10. COMPLEMENTOS DE LA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 3D-ESTÁTICOS.

Sumario.

Sumario.

1. Introducción.

2. Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo tetraedro. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma.

3. Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo hexaédrico lineal.

Objetivos.

Conocer los conceptos más importantes para definir la matriz de rigidez de elementos finitos 3D-estaticos.

Bibliografía.

9. Klaus-Jurgen Bathe "Finite Element Procedures", 2da Edição.
10. G.R.Liu "The Finite element Method- A practical course".
11. The Finite Element Method using MATLAB - Kwon and Bang
12. George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics McGraw-Hill.
13. Chaves, E, W.V. & Mínguez, R. (2009). "Mecánica Computacional en la Ingeniería con aplicaciones en MATLAB. Editorial UCLM.

Bibliografía opcional portugués

12. Avelino Alves Filho "Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE", 5ta Edição.

1. <u>Introducción.</u>

En continuación con las aulas anteriores vamos a iniciar con la formulación de elementos finitos 3D- estáticos, destacando los conceptos más importantes para el uso y formulación correcta. Anteriormente construimos una biblioteca para elementos 1D y 2D-estáticos, siguiendo los mismos procedimientos vamos a construir nuestra biblioteca de elementos 3D-estáticos.

El procedimiento para desarrollar las ecuaciones será similar a la de los elementos 2D detallados anteriormente. En los desarrollos de los elementos siguientes será establecer principalmente los siguientes tres pasos de procedimientos como:

1. Construcción de las funciones de forma matriz N que satisfaga las 3 propiedades Ec. (5.8) -(5.9).
2. Formulación de la *Matriz Desplazamiento-Deformación* $\boldsymbol{B}$.
3. Cálculo de $\{\boldsymbol{k^e}\}$, $\{\boldsymbol{\sigma^e}\}$, $\{\boldsymbol{\varepsilon^e}\}$

2. Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo tetraédrico.

Para iniciar los pasos e introducir las ecuaciones básicas necesarias para el elemento tetraédrico consideremos o elemento finito solido tetraédrico de cuatro nodos, fig 10.1.

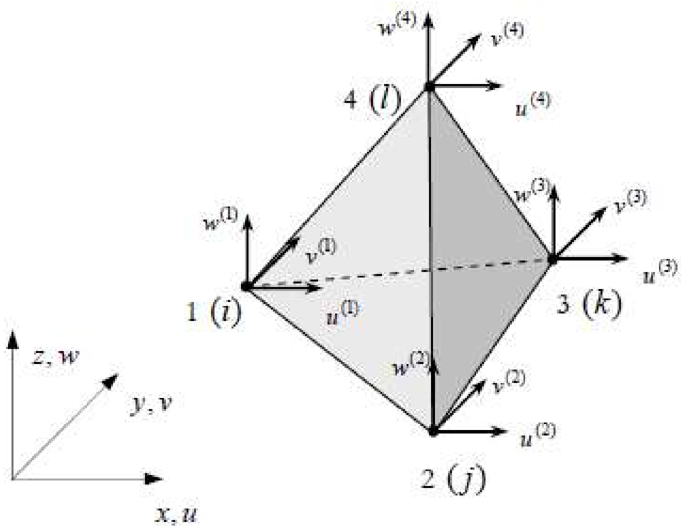


Figura 10.1 Tetraedro lineal de 4 nodos.

El desplazamiento de los nodos del elemento puede ser descritos por las componentes u, v, w pues la definición de un campo de desplazamientos en un sólido sobre estado triaxial de tensiones es realizada por las tres componentes de desplazamiento, a única diferencia con las Teoría de Elasticidad es que en este cado el número de puntos escogidos para describir el comportamiento del solido es discreto, más la naturaleza física del problema es la misma.

El elemento solido presenta 3 grados de libertad por nodos (DOF), con 4 nodos este elemento tendrá 12 grados de libertad como:

$$\{f\}_{12x1} = [\boldsymbol{K}]_{\boldsymbol{12x12}} \{\delta\}_{12x1} \tag{10.1}$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, vamos a establecer los tres pasos:

Selección de las funciones de desplazamientos.

Al igual que vimos en clases anteriores para elementos 2D, tenemos que establecer una relación entre los desplazamientos dentro del elemento con los desplazamientos nodales, sabemos que el grado del polinomio de interpolación es definido a partir del conocimiento del número de grados de libertad del elemento (**DOF=12**). Para la construcción del polinomio de interpolación vamos a utilizar la expansión polinomial en un problema tridimensional dando origen una representación espacial (triángulo de Pascal en espacio) y podríamos generar toda una *familia de funciones* (polinomios que son completos al alcanzar cada etapa de tetraedro y condición de compatibilidad asegurada) que serían representativas de las funciones de interpolación adoptadas para definir el campo de desplazamiento en los elementos sólidos,

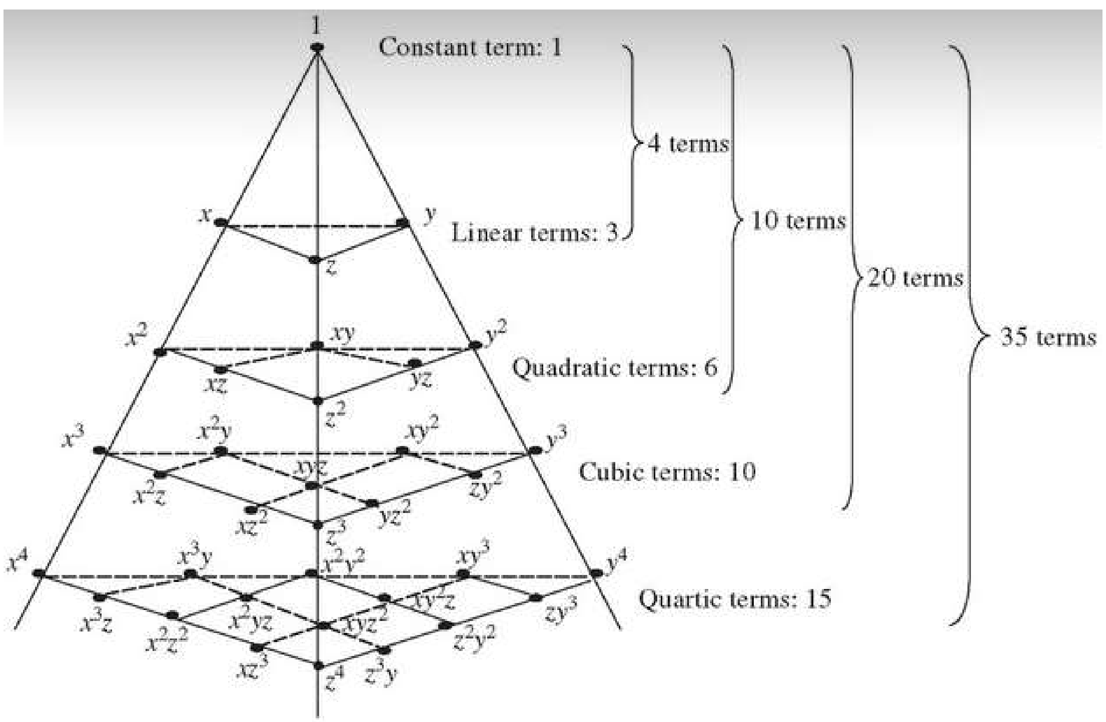


Figura 10.2 Polinomio de Pascal en el espacio.

Siendo definido por las componentes *u*, *v* y *w* en las direcciones *x*, *y*, *z* respectivamente. La función de desplazamiento del elemento será una función lineal:

$$\{\boldsymbol{u}(x,y,z)\} = \begin{cases} u(x,y,z) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4z \\ v(x,y,z) = C_5 + C_6x + C_7y + C_8z \\ w(x,y,z) = C_9 + C_{10}x + C_{11}y + C_{12}z \end{cases} \tag{10.2}$$

Para propósitos de una representación computacional, vamos a representar la Ec (10.2) en forma matricial.

$$\{\boldsymbol{u}(x,y,z)\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{p}(x,y,z)C \tag{10.3}$$

Analizando la Ec. (10.3) vemos que el desplazamiento vario linealmente con *x*, *y*, *z* por eso es llamado de elemento linear, para este elemento es atendida la condición de compatibilidad tanto en los nodos del elemento como también en el contorno. Para determinar los coeficientes C de la Ec. (10.3) vamos a sustituir las coordenadas de los puntos nodales en la Ec. (10.2) como:

$$
\begin{cases}
u(x_1, y_1, z_1) \equiv u_1 = C_1 + C_2 x_1 + C_3 y_1 + C_4 z_1 \\
v(x_1, y_1, z_1) \equiv v_1 = C_5 + C_6 x_1 + C_7 y_1 + C_8 z_1 \\
w(x_1, y_1, z_1) \equiv w_1 = C_9 + C_{10} x_1 + C_{11} y_1 + C_{12} z_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u(x_2, y_2, z_2) \equiv u_2 = C_1 + C_2 x_2 + C_3 y_2 + C_4 z_2 \\
v(x_2, y_2, z_2) \equiv v_2 = C_5 + C_6 x_2 + C_7 y_2 + C_8 z_2 \\
w(x_2, y_2, z_2) \equiv w_2 = C_9 + C_{10} x_2 + C_{11} y_2 + C_{12} z_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u(x_3, y_3, z_3) \equiv u_3 = C_1 + C_2 x_3 + C_3 y_3 + C_4 z_3 \\
v(x_3, y_3, z_3) \equiv v_3 = C_5 + C_6 x_3 + C_7 y_3 + C_8 z_3 \\
w(x_3, y_3, z_3) \equiv w_3 = C_9 + C_{10} x_3 + C_{11} y_3 + C_{12} z_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u(x_4, y_4, z_4) \equiv u_4 = C_1 + C_2 x_4 + C_3 y_4 + C_4 z_4 \\
v(x_4, y_4, z_4) \equiv v_4 = C_5 + C_6 x_4 + C_7 y_4 + C_8 z_4 \\
w(x_4, y_4, z_4) \equiv w_4 = C_9 + C_{10} x_4 + C_{11} y_4 + C_{12} z_4
\end{cases}
\tag{10.4}
$$

Reescribiendo la Ec. (10.4) en forma compacta como:

$$
\{u_e\}_{12x1} = [\boldsymbol{A}]_{12x12}\{C\}_{12x1} \tag{10.5}
$$

Calculando los coeficientes de **C,** utilizando la inversa de $[\boldsymbol{A}]$

$$
[\boldsymbol{A}]^{-1}\{u_e\} = [\boldsymbol{A}]^{-1}[\boldsymbol{A}]\{C\} \;\; \rightarrow [\boldsymbol{A}]^{-1}\{u_e\} = [\mathbf{1}]\{C\} \;\therefore\quad \{C\} = [\boldsymbol{A}]^{-1}\{u_e\} \tag{10.6}
$$

Sustituyendo en la Ec. (10.3) la Ec. (10.6)

$$
\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\} = \boldsymbol{p}(x, y, z)[\boldsymbol{A}]^{-1}\{u_e\} = [\boldsymbol{N}]\{u_e\} \tag{10.7}
$$

Donde la *función de forma* $[\boldsymbol{N}]$**,** para el campo de desplazamiento como:

$$
[\boldsymbol{N}]_{\boldsymbol{3x12}} = \boldsymbol{p}(x, y, z)_{\boldsymbol{3x12}}[\boldsymbol{A}]^{-1}{}_{12x12} \tag{10.8}
$$

Por analogía podemos establecer

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \tag{10.9}$$

Definimos las funciones de formas como:

$$N_1(x,y,z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}; \qquad N_2(x,y,z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}};$$

$$N_3(x,y,z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}} \qquad N_4(x,y,z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}} \tag{10.10}$$

$$Siendo \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 3!\,V = 6V$$

En la Ec. (10.10) escribimos las funciones de forma N_i(x,y,z).

$$N_1(x,y,z) = \frac{1}{6V}(a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z)$$

$$N_2(x,y,z) = \frac{1}{6V}(a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z) \tag{10.11}$$

$$N_3(x,y,z) = \frac{1}{6V}(a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z)$$

$$N_4(x,y,z) = \frac{1}{6V}(a_4 + b_4x + c_4y + d_4z)$$

Donde

$$a_i = (-1)^{i+h}det\begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{bmatrix}, \quad b_i = (-1)^{i+h}det\begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{bmatrix}$$

$$c_i = (-1)^{i+h}det\begin{bmatrix} 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \\ 1 & x_l & z_l \end{bmatrix}, \quad d_i = (-1)^{i+h}det\begin{bmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_l & y_l \end{bmatrix}$$

Siendo *h* número de la columna y el subíndice *i* varía desde 1 a 4, y *j, k* y *l* son determinados por una permutación cíclica en el orden de (*i, j,k,l)*.

$$\begin{vmatrix} a_{1h} & b_{1h} & c_{1h} & d_{1h} \\ a_{2h} & b_{2h} & c_{2h} & d_{2h} \\ a_{3h} & b_{3h} & c_{3h} & d_{3h} \\ a_{4h} & b_{4h} & c_{4h} & d_{4h} \end{vmatrix} \text{con } a_{ih} = a_{1h}\ (i = 1\ ;\ h = \ no.columna)$$

Por ejemplo, si **i**=1, entonces j=*2,* ***k****=3,* ***l****=4*, cuando **i**=2, entonces **j**=3, **k**=4, **l**=1, etc.

Reescribiendo la Ec. (10.8)

(10.12)

$$\begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \vdots & N_2 & 0 & 0 & \vdots & N_3 & 0 & 0 & \vdots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \vdots & 0 & N_2 & 0 & \vdots & 0 & N_3 & 0 & \vdots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \vdots & 0 & 0 & N_2 & \vdots & 0 & 0 & N_3 & \vdots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \cdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix}$$

Definiendo la relación deformación – desplazamiento y tensión – deformación como:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{10.13}$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x)\} = [\boldsymbol{L}]\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\} = [\boldsymbol{L}][\boldsymbol{N}]\{u_e\} = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})]\{u_e\}$$

$$[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})] = [\boldsymbol{B_1} \quad \boldsymbol{B_2} \quad \boldsymbol{B_3} \quad \boldsymbol{B_4}]$$

$$[\boldsymbol{B}_{\mathrm{i}}]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Es importante resaltar las derivadas de las funciones *u, v, w* como:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_7 \\ C_{12} \\ C_3 + C_6 \\ C_4 + C_{10} \\ C_8 + C_{11} \end{Bmatrix} \tag{10.14}$$

Las deformaciones calculadas anteriores Ec. (10.14) son funciones y se aplican en todos los puntos del elemento y son constante, siendo una de las limitaciones del elemento solido tetraédrico lineal, el *Elemento sólido tetraédrico linear es un elemento de deformaciones constantes.*

Similarmente podemos efectuar el cálculo de las tensiones a partir del cálculo de las deformaciones, entonces podemos concluir que también es un elemento de tensiones constantes, el *Elemento sólido tetraédrico linear es un elemento de tensiones constantes.*

Por sus deformaciones constantes y tensiones podemos hacer una analogía entre el elemento tetraédrico lineal con el elemento estudiado plano triangular de 3 nodos.

Usando las Ec. (10.11) para sustituir N_i

$$[\boldsymbol{B_i}] = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ d_i & 0 & b_i \\ 0 & d_i & c_i \end{bmatrix} \tag{10.15}$$

En aulas anteriores ya fue obtenida la ecuación para matriz de rigidez de un elemento genérico y podemos generalizar para cualquier elemento solido 3D con *n* nodos como:

$$\{K^e\}_{3nx3} = \int_{vol} [\boldsymbol{B}(x)]^{\boldsymbol{T}}{}_{\boldsymbol{3nx6}} \cdot [\boldsymbol{D}]_{6x6} \cdot [\boldsymbol{B}(x)]_{\boldsymbol{6x\,3n}} \boldsymbol{dVol}$$

$$Con \quad \{K_{\boldsymbol{ij}}{}^e\}_{3x3} = \int_{vol} [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{i}}]^{\boldsymbol{T}}{}_{\boldsymbol{3x6}} \cdot [\boldsymbol{D}]_{6x6} \cdot \left[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{j}}\right]_{\boldsymbol{6x\,3}} \boldsymbol{dVol} \tag{10.16}$$

La Ec. (10.16) para el tetraedro de 4 nodos con las propiedades del material homogéneo y con la matriz de deformación constante es dada como:

$$\{K_{\boldsymbol{ij}}{}^e\}_{3x3} = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{i}}]^{\boldsymbol{T}} \cdot [\boldsymbol{D}] \cdot \left[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{j}}\right] \boldsymbol{V} \tag{10.17}$$

La forma explícita de la Ec. (10.17)

$$[K^e]_{\boldsymbol{12x12}} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{k}_{11}] & [\boldsymbol{k}_{12}] & [\boldsymbol{k}_{13}] & [\boldsymbol{k}_{14}] \\ [\boldsymbol{k}_{21}] & [\boldsymbol{k}_{22}] & [\boldsymbol{k}_{23}] & [\boldsymbol{k}_{24}] \\ [\boldsymbol{k}_{31}] & [\boldsymbol{k}_{32}] & [\boldsymbol{k}_{33}] & [\boldsymbol{k}_{34}] \\ [\boldsymbol{k}_{41}] & [\boldsymbol{k}_{42}] & [\boldsymbol{k}_{43}] & [\boldsymbol{k}_{44}] \end{bmatrix} \tag{10.18}$$

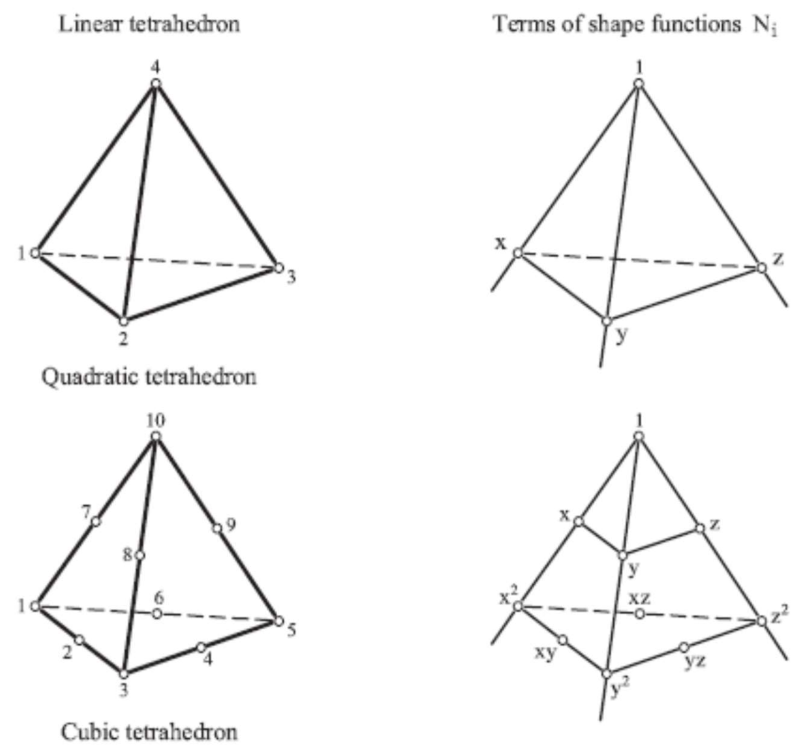
$$\{\boldsymbol{K_{ij}}^{\boldsymbol{e}}\}_{3x3}$$

$$= \frac{1}{36V}\begin{bmatrix} (d_{11}b_ib_j + d_{44}c_ic_j + d_{55}d_id_j) & (d_{12}b_ic_j + d_{44}c_ib_j) & (d_{13}b_id_j + d_{55}d_ib_j) \\ (d_{21}c_ib_j + d_{44}b_ic_j) & (d_{22}c_ic_j + d_{44}b_ib_j + d_{66}d_id_j) & (d_{23}c_id_j + d_{66}d_ic_j) \\ (d_{31}d_ib_j + d_{55}b_id_j) & (d_{32}d_ic_j + d_{66}c_id_j) & (d_{33}d_id_j + d_{55}b_ib_j + d_{66}c_ic_j) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{d_{ij}}$: son los elementos de la matriz constitutiva

$\boldsymbol{b_i}, \boldsymbol{c_i}, \boldsymbol{d_i}$:   son los parámetros de la función de forma N_i

Podemos notar que los elementos tetraédricos de lados rectos son una extensión 3D directa de triángulos de lados rectos. Sus funciones de interpolación son polinomios completos con términos que pueden ser fácilmente deducidos del tetraédro de Pascal , fig 10.3.



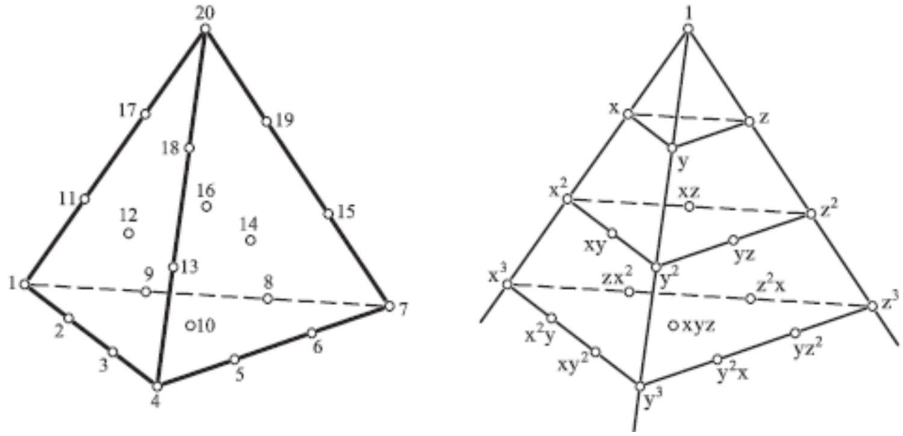


Figura 10.3 Tetraedros linear 4 nodos, cuadrático (10 nodos) y cubico (20). términos polinomiales contenidos en la función de interpolación. (Oñate 2009).

3. <u>Formulación de la función de forma para un elemento 3D de tipo hexaédrico lineal.</u>

La figura 10.4 representa un cuerpo sólido sobre la acción de fuerzas en las tres direcciones *x*, *y*, *z*, por tanto, sobre la condición de estado triaxial de tensiones, para la división del cuerpo solido utilizamos montaje en este caso de elementos solidos de tipo paralelepípedos (que son los elementos solidos hexaédrico lineal).

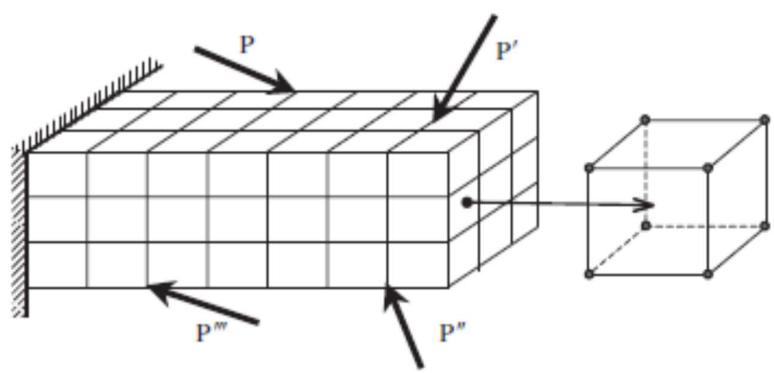


Figura 10.4 Bloque solido divido en elementos solidos hexaedro de 8 nodos. (G.R.Liu)

El movimiento de los nodos de los elementos puede ser descrito por los componentes *u, v, w* efectuada por tres componentes de desplazamientos presentando 3 grados de libertad (DOF=3) por nodo, como tiene 8 nodos este elemento tendrá 24 grados de libertad expresado como:

$$\{f\}_{24x1} = [\boldsymbol{K}]_{\boldsymbol{24x24}} \{\delta\}_{24x1} \tag{10.19}$$

Siguiendo el mismo procedimiento vamos a definir las funciones de interpolación:

$$\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\} = \begin{cases} u(x,y,z) = C_1 + C_2x + C_3y + C_4z + C_5xy + C_6xz + C_7yz + C_8xyz \\ v(x,y,z) = C_9 + C_{10}x + C_{11}y + C_{12}z + C_{13}xy + C_{14}xz + C_{15}yz + C_{16}xyz \\ w(x,y,z) = C_{17} + C_{18}x + C_{19}y + C_{20}z + C_{21}xy + C_{22}xz + C_{23}yz + C_{24}xyz \end{cases} \tag{10.20}$$

Puede ser notado de la fig 10.2 que ninguna preferencia fue dada para las direcciones *x, y, z* , puede ser observado que los desplazamientos varían linealmente para por eso es llamado de elemento lineal , y para este elemento es atendida la condición de compatibilidad en los nodos del elemento como también en el contorno.

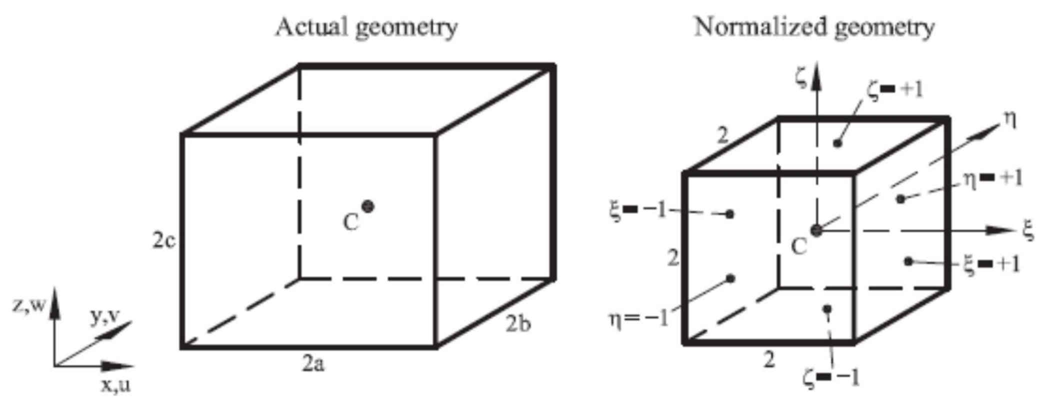
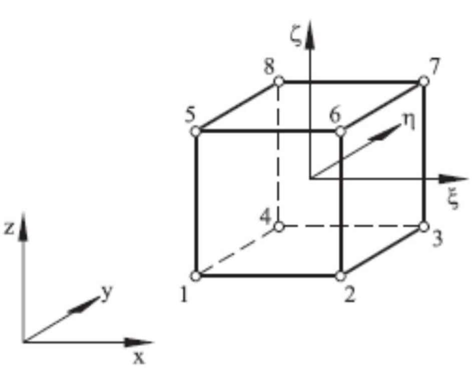


Figura 10.5 Elemento solido hexaedro en el estado actual y mapeado a una geometría normalizada. (Oñate 2009) .

$$N_1(x,y,z)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y & z & xy & xz & yz & xyz \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 & x_2y_2z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & x_3y_3 & x_3z_3 & y_3z_3 & x_3y_3z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 & x_4y_4z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & x_5y_5 & x_5z_5 & y_5z_5 & x_5y_5z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & x_6y_6 & x_6z_6 & y_6z_6 & x_6y_6z_6 \\ 1 & x_7 & y_7 & z_7 & x_7y_7 & x_7z_7 & y_7z_7 & x_7y_7z_7 \\ 1 & x_8 & y_8 & z_8 & x_8y_8 & x_8z_8 & y_8z_8 & x_8y_8z_8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1y_1 & x_1z_1 & y_1z_1 & x_1y_1z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2y_2 & x_2z_2 & y_2z_2 & x_2y_2z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & x_3y_3 & x_3z_3 & y_3z_3 & x_3y_3z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & x_4y_4 & x_4z_4 & y_4z_4 & x_4y_4z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & x_5y_5 & x_5z_5 & y_5z_5 & x_5y_5z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 & x_6y_6 & x_6z_6 & y_6z_6 & x_6y_6z_6 \\ 1 & x_7 & y_7 & z_7 & x_7y_7 & x_7z_7 & y_7z_7 & x_7y_7z_7 \\ 1 & x_8 & y_8 & z_8 & x_8y_8 & x_8z_8 & y_8z_8 & x_8y_8z_8 \end{vmatrix}} \tag{10.21}$$

En la Ec. (10.10) escribimos las funciones de forma N_i(x,y,z), utilizamos las coordenadas naturales o locales.



Local node number	Local coordinates ξ_i	η_i	ζ_i
1	−1	−1	−1
2	1	−1	−1
3	1	1	−1
4	−1	1	−1
5	−1	−1	1
6	1	−1	1
7	1	1	1
8	−1	1	1

Figura 10.6 Sistema de coordenadas normalizado para el sólido hexaedro linear. (Oñate 2009).

La forma genérica de las N_i(x,y,z),

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \qquad (10.22)$$

Definiendo la relación deformación – desplazamiento y tensión – deformación como:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad (10.23)$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x)\} = [\boldsymbol{L}]\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\} = [\boldsymbol{L}][\boldsymbol{N}]\{u_e\} = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})]\{u_e\}$$

$$[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})] = [\boldsymbol{B_1} \quad \boldsymbol{B_2} \quad \boldsymbol{B_3} \quad \boldsymbol{B_4} \quad \boldsymbol{B_5} \quad \boldsymbol{B_6} \quad \boldsymbol{B_7} \quad \boldsymbol{B_8}]$$

$$[\boldsymbol{B}_{\mathrm{i}}]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

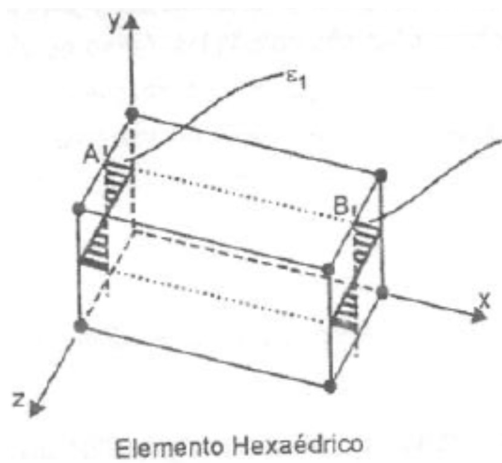
Es importante resaltar las derivadas de las funciones *u , v, w* como:

$$
\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \begin{Bmatrix} C_2 + C_5 y + C_6 z + C_8 yz \\ C_{11} + C_{13} x + C_{15} z + C_{16} xz \\ C_{20} + C_{22} x + C_{23} y + C_{24} xy \\ C_3 + C_5 x + C_7 z + C_8 xz + C_{10} + C_{13} y + C_{14} z + C_{16} yz \\ C_4 + C_6 x + C_7 y + C_8 xy + C_{18} + C_{21} y + C_{22} z + C_{24} yz \\ C_{12} + C_{14} x + C_{15} y + C_{16} xy + C_{19} + C_{21} x + C_{23} z + C_{24} xz \end{Bmatrix} \quad (10.24)
$$

Como podemos notar en la Ec. (10.24) las deformaciones son funciones y se aplican en todos los puntos del elemento variando linealmente, por tanto, no son constante, como en el caso del elemento sólido tetraédrico lineal. La deformación ε_x varia linealmente con *y* y *z* cualquier variación lineal de las deformaciones a lo largo de la sección transversal del elemento podrá ser representado por el elemento solido hexaédrico lineal.

Como una limitación de este elemento solido hexaédrico lineal debe ser observada que la deformación en ε_x indica que las deformaciones en la dirección *X* varían linealmente con *y* y *z* , pero independientes de x , eso nos dice que para un elemento hexaédrico lineal , fig 10.7 , para dada una posición definida por *x* y *z* a lo largo del elemento , independiente de la posición de *x* en que se encuentre, las deformaciones son constante a lo largo de todo el largo del elemento.



Para un dado y y z dentro del elemento, ε_x no varía con x, Así en los puntos A y B del elemento $\varepsilon_x = \varepsilon_A = \varepsilon_B = \varepsilon_1$.

Figura 10.7 Calculo de las deformaciones en la dirección ε_x para el elemento sólido hexaédrico lineal. (Alves 2018).

Nota: Como cuidado para elemento solido hexaédrico lineal debemos evitar utilizar en una región en que ocurra una acentuada variación de la deformación ε_x a lo largo del eje x del elemento, evitar la definición de un elemento muy largo en relación con su altura, puesto que la deformación ε_x será constante en la dirección x.