MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Henry Figueredo Losada

Universidad de la República-Uruguay
IIMPI-FING

henryf@fing.edu.uy

19 de octubre de 2020

Sumario

CLASE 8.

TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.

1. Introducción.

2. Formulación de la función de forma para un elemento 2D de tipo rectangular.

    2.1 Selección de las funciones de desplazamientos

    2.2 Funciones de forma.

    3.Calculo de las deformaciones.

TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.

CLASE 8. FORMULACIÓN DE ELEMENTO RECTANGULAR.

1. Introducción. ón de la función de forma para un elemento 2D de tipo rectangular.
2. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma.

Clase No.8

1. Introducción.

En continuación con las aulas anteriores vamos a introducir otro tipo de elemento finito como parte de la biblioteca de elementos que estamos construyendo en este curso, o sea ya tenemos definidos los elementos de tipos resortes (spring), barra (truss) y vigas (Beam), y el elemento2D de tipo triangular en esta clase vamos a formular nuestro segundo elemento de tipo 2D en estado plano de deformaciones o tensiones (elemento rectangular).

El procedimiento para desarrollar las ecuaciones será similar a la de los elementos de tipo triangulo detallados anteriormente.

Clase No.8

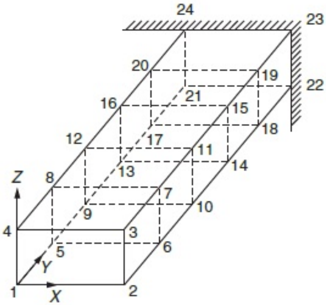
1. Continuación.

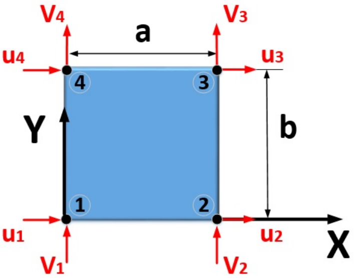
En los desarrollos siguientes podemos resumir los siguientes pasos de procedimientos:

1. Exprese los desplazamientos nodales en función de las coordenadas de nodos y constante $\mathbf{C_i}$ para obtener la matriz $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
2. Calcule la inversa de matriz $\mathbf{[A]}$;
3. Calcule a matriz N de a funciones de forma, $\mathbf{[N]}=\mathbf{p(x,y)[A]}^{-1}$;
4. Aplique el operador diferencial y obtenga la Matriz Desplazamiento-Deformación $[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}})]$;
5. Defina el estado de tensión/deformación y calcule la integral, $\{\mathbf{k^e}\} = \int_{vol} [\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}})]^{\mathbf{T}} \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}})]\ \mathbf{dVol}$
6. Cálculo $\{\sigma^{\mathbf{e}}\}, \{\varepsilon^{\mathbf{e}}\}$

2. Formulación de la función de forma para un elemento 2D de tipo rectangular.

Para iniciar los pasos e introducir las ecuaciones básicas necesarias para el elemento plano rectangular consideremos la figura, la cual ha sido discretizada con elementos rectangulares. Los desplazamientos nodales desconocidos son dados como:





2.1 Selección de las funciones de desplazamientos.

Tenemos que establecer una relación entre los desplazamientos dentro del elemento con los desplazamientos nodales, sabemos que el grado del polinomio de interpolación es definido a partir del conocimiento del número de grados de libertad del elemento **(DOF=8)**. Siendo definido por las componentes u y v en las direcciones x y y respectivamente.

La función de desplazamiento del elemento será una función lineal con 8 coeficientes:

$$\{\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})\} = \begin{cases} u\left(x, y\right) = C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 xy \\ v\left(x, y\right) = C_4 + C_5 x + C_6 y + C_7 xy \end{cases} \tag{1}$$

el coeficiente C_3, C_7 acompaña el producto de las variables x e y se justifica , desde que ninguna preferencia deba ser dada para las direcciones x e y

Continuación.

Para propósitos de una representación computacional, vamos a representar la ecuación en forma matricial:

$$\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{Bmatrix} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{C} \quad (2)$$

Continuación.

Para determinar los coeficientes **C** de la Ec.(2) vamos a sustituir las coordenadas de los puntos nodales en la Ec. (1) como:

$$\begin{cases} u\left(x_1, y_1\right) \equiv u_1 = C_0 + C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3 x_1 y_1 \\ v\left(x_1, y_1\right) \equiv v_1 = C_4 + C_5 x_1 + C_6 y_1 + C_7 x_1 y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u\left(x_2, y_2\right) \equiv u_2 = C_0 + C_1 x_2 + C_2 y_2 + C_3 x_2 y_2 \\ v\left(x_2, y_2\right) \equiv v_2 = C_4 + C_5 x_2 + C_6 y_2 + C_7 x_2 y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u\left(x_3, y_3\right) \equiv u_3 = C_0 + C_1 x_3 + C_2 y_3 + C_3 x_3 y_3 \\ v\left(x_3, y_3\right) \equiv v_3 = C_4 + C_5 x_3 + C_6 y_3 + C_7 x_3 y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u\left(x_4, y_4\right) \equiv u_4 = C_0 + C_1 x_4 + C_2 y_4 + C_3 x_4 y_4 \\ v\left(x_4, y_4\right) \equiv v_4 = C_4 + C_5 x_4 + C_6 y_4 + C_7 x_4 y_4 \end{cases}$$

Continuación.

En la representación de forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} \tag{3}$$

2.2 Funciones de forma.

Entonces las funciones de forma pueden ser obtenidas como:

$$N_1(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y & x \bullet y \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix}}; \quad N_2(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x & y & x \bullet y \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix}};$$

Continuación.

$$N_3\left(x,y\right)=\frac{\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & x_1y_1\\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2\\ 1 & x & y & x\bullet y\\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & x_1y_1\\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2\\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3\\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4\end{vmatrix}};\quad N_4\left(x,y\right)=\frac{\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & x_1y_1\\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2\\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3\\ 1 & x & y & x\bullet y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & x_1y_1\\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2\\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3\\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4\end{vmatrix}}$$

Continuación.

Utilizando la Ecuación:

$$\{\mathbf{u}\,(x,\mathbf{y})\} = \; [\mathbf{N}]\,\{\mathbf{u_e}\} = [\mathbf{N}]\,\{\mathbf{d}\}$$

Recordando para N_i tal que $N_1 = 1$ en el nodo 1 y $N_1 = 0$ expandiendo como:

$$\begin{Bmatrix} u\,(x,y) \\ v\,(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Clase No.8

Continuación.

Particularizando el caso para el elemento rectangular de la figura 1, cálculo de las funciones de forma N_i como:

$$N_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y & xy \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{ab}\left(ab - bx - ay + xy\right)$$

Clase No.8

Continuación.

cálculo de las funciones de forma N_i como:

$$N_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & y & xy \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{ab}\left(bx - xy\right);$$

Continuación.

cálculo de las funciones de forma N_i como:

$$N_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & x & y & xy \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{ab}\,(xy)\,;$$

Continuación.

cálculo de las funciones de forma N_i como:

$$N_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & x & y & xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{ab}\left(ay - xy\right);$$

Clase No.8

3.Calculo de las deformaciones.

Retomando la breve revisión sobre algunos de los Conceptos básicos de la teoría de elasticidad :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \ ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad ; \ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Usando la Ec. (1) podemos también expresar la deformación en términos de C_i como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_1 + C_3 y; \\ \varepsilon_y &= C_6 + C_7 x; \\ \gamma_{xy} &= C_2 + C_5 + C_3 x + C_7 y \end{aligned}$$

Podemos tirar una conclusión importante de ecuación con respecto al elemento en estudio, las deformaciones calculadas son funciones y se aplican a todos los puntos del elemento variando linealmente.

Clase No.8

Continuación

Utilizando la ecuación:

$$\{\varepsilon(\bar{\mathbf{x}})\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}})\} = [\mathbf{L}][\mathbf{N}]\{\mathbf{u_e}\} = [\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}})]\{\mathbf{u_e}\}$$

$$[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{ab}\begin{bmatrix} y-b & 0 & \vdots & b-y & 0 & \vdots & y & 0 & \vdots & -y & 0 \\ 0 & x-a & \vdots & 0 & -x & \vdots & 0 & x & \vdots & 0 & a-x \\ x-a & y-b & \vdots & -x & b-y & \vdots & x & y & \vdots & a-x & -y \end{bmatrix}$$

Continuación

Sustituyendo la ecuación anterior para la matriz de rigidez como:

$$[\mathbf{k}^e] = t\int_{y=0}^{y=b}\int_{x=0}^{x=a} [\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}})]^{\mathbf{T}} \left[\mathbf{C}_{(2D)}\right] [\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}})] \quad dxdy \qquad (4)$$

Finalmente, después de integrar se obtiene como:

$$[\mathbf{k^e}] = t \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ & & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ & Sim & & & & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ & & & & & & k_{77} & k_{78} \\ & & & & & & & k_{88} \end{bmatrix}$$

Continuación

Siendo

$$k_{11} = \frac{bC_{11}}{3a} + \frac{aC_{33}}{3b} \quad k_{12} = \frac{C_{12+}C_{33}}{4} \quad k_{13} = \frac{-bC_{11}}{3a} + \frac{aC_{33}}{6b} \quad k_{14} = \frac{C_{12}-C_{33}}{4}$$

$$k_{15} = \frac{-bC_{11}}{6a} - \frac{aC_{33}}{6b} \quad k_{16} = -k_{12} \quad k_{17} = \frac{bC_{11}}{6a} - \frac{aC_{33}}{3b} \quad k_{18} = -k_{14}$$

$$k_{22} = \frac{aC_{11}}{3b} + \frac{bC_{33}}{3a} \quad k_{23} = -k_{14} \quad k_{24} = \frac{aC_{11}}{6b} - \frac{bC_{33}}{3a} \quad k_{25} = -k_{12}$$

$$k_{26} = \frac{-aC_{11}}{6b} - \frac{bC_{33}}{6a} \quad k_{27} = k_{14} \quad k_{28} = \frac{-aC_{11}}{3b} + \frac{bC_{33}}{6a} \quad k_{33} = k_{11}$$