**Universidad de la República** **Matemática Discreta 1**
**Facultad de Ingeniería**
**Instituto de Matemática y Estadística** **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 10

**Grafos III: Planitud y Coloración**

ALGUNAS DEFINICIONES Y RESULTADOS ÚTILES:

- Inmersión plana: representación del grafo en el plano de forma de que dos aristas distintas no se cortan (salvo en los vértices en el caso de ser adyacentes).
- Grafo plano: grafo que admite una inmersión plana.
- En toda inmersión plana de un grafo plano la suma de los grados de las regiones es el doble de la cantidad de aristas (incluyendo la región infinita).
- Región infinita: es la región no acotada determinada por una inmersión plana de un grafo.
- Fórmula de Euler para grafos planos: $v - e + r = 1 + \kappa$, donde $v, e, r$ y $\kappa$ son la cantidad de vértices, la cantidad de aristas, la cantidad de regiones y la cantidad de componentes conexas del grafo.
- Sea $G$ un grafo sin vértices de grado $2$, decimos que $G'$ es homeomorfo a $G$ si este puede obtenerse a partir de $G$ via subdivisiones elementales (informalmente, agregando vértices en medio de las aristas).
- Teorema de Kuratowski: un grafo es no plano sii tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ y $K_5$.

**Ejercicio 1.** Encuentre una inmersión plana para cada uno de los siguientes grafos planos $G = (V, E)$:

(a) $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq 4\}$;

(b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq 5, i - j \text{ impar}\}$;

(c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}$.

(d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 1\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{1, 7\}\}$.

**Ejercicio 2.** Para cada una de las inmersiones planas de los grafos del ejercicio anterior determine el grado de cada una de las regiones y compruebe que su suma es $2|E|$.

**Ejercicio 3.** Sea $G = (V, E)$ un grafo plano con $8$ vértices, que admite una inmersión plana que determina $4$ regiones con grados $3, 3, 4$ y $8$, respectivamente (la región de grado $8$ corresponde a la región infinita).

(a) Determine $e$, la cantidad de aristas del grafo.

(b) Determine $\kappa$, la cantidad de componentes conexas del grafo.

(c) Encuentre un grafo que cumpla todas las condiciones de la letra.

**Ejercicio 4.** Sin usar Kuratowski pruebe que $K_{3,3}$ y $K_5$ no son grafos planos[1].
*Sugerencia: Por absurdo, suponga que haya una inmersión plana y acote inferiormente los grados de las supuestas regiones, luego utilice la fórmula de Euler para llegar a una contradicción.*

**Ejercicio 5.** Determine cuáles de los grafos de la Figura 1 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a $K_5$ o a $K_{3,3}$.

**Ejercicio 6.** Demostrar que en todo grafo plano $e \leq 3v - 6$, donde $e$ y $v$ denotan la cantidad de aristas y de vértices, respectivamente. Concluya que todo grafo plano tiene algún vértice de grado 5 o menor.

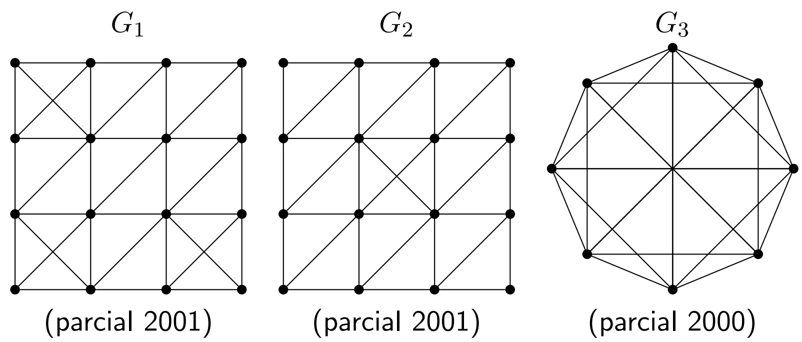
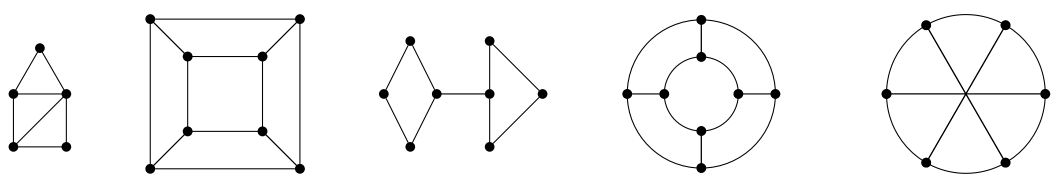



Figura 1

**Ejercicio 7.** Demostrar que todo grafo plano se puede colorear con seis colores.

**Ejercicio 8.** Encotrar el número cromático de los siguientes grafos.



**Ejercicio 9.** Hallar el polinomio cromático de $C_n$, $K_n$, $P_n$, $K_{2,n}$ y $K_5$ menos una arista. Deducir el número cromático de cada grafo y la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.

**Ejercicio 10.** Sea $G$ un árbol con $n \geq 2$ vértices. Hallar el polinomio y número cromático de $G$.

**Ejercicio 11.** Demostrar que $\chi(G) \leq 2$ si y sólo si $G$ no tiene ciclos impares.

**Ejercicio 12.** Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} gr(v)$.

(a) Demostrar que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(b) Dar un ejemplo de grafo que cumpla la igualdad.

[1] Si ya fue vista en Teórico, puede revisar la demostración pero se recomienda entenderla y no simplemente copiarla.