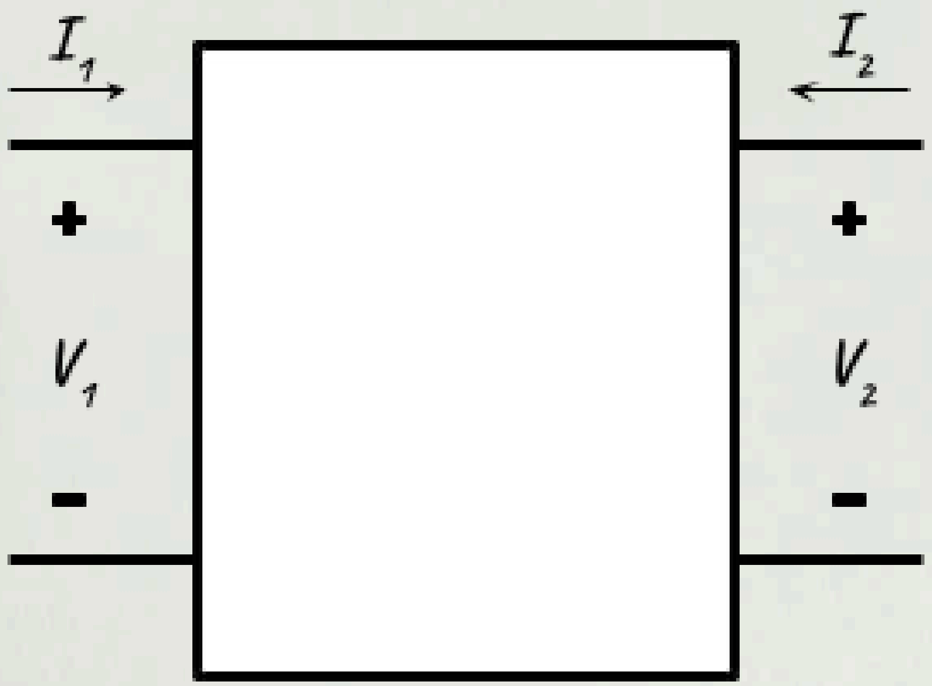
Cuadripolos

Cuadripolos

4 Variables de interes:
- 2 tensiones
- 2 Corrientes

Caja Negra



2 "compuertas"
Lado 1 y Lado 2
o
Entrada / Salida

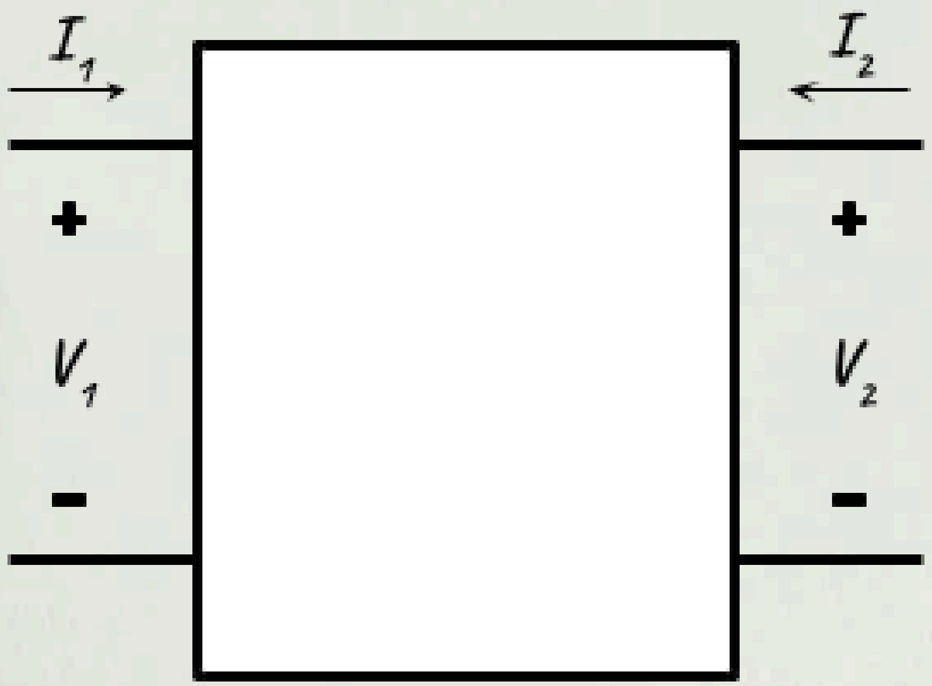
HIPÓTESIS:

1. Sistema lineal
2. Sin fuentes independientes
3. La corriente que entra por un terminal sale por el otro del mismo lado
4. Puede tener fuentes dependientes:
   a. Pasivo (sin fuentes dep)
   b. Activo (con fuentes dep)

¿Qué hacemos con los datos previos en Laplace?

Cuadripolos

Caja Negra



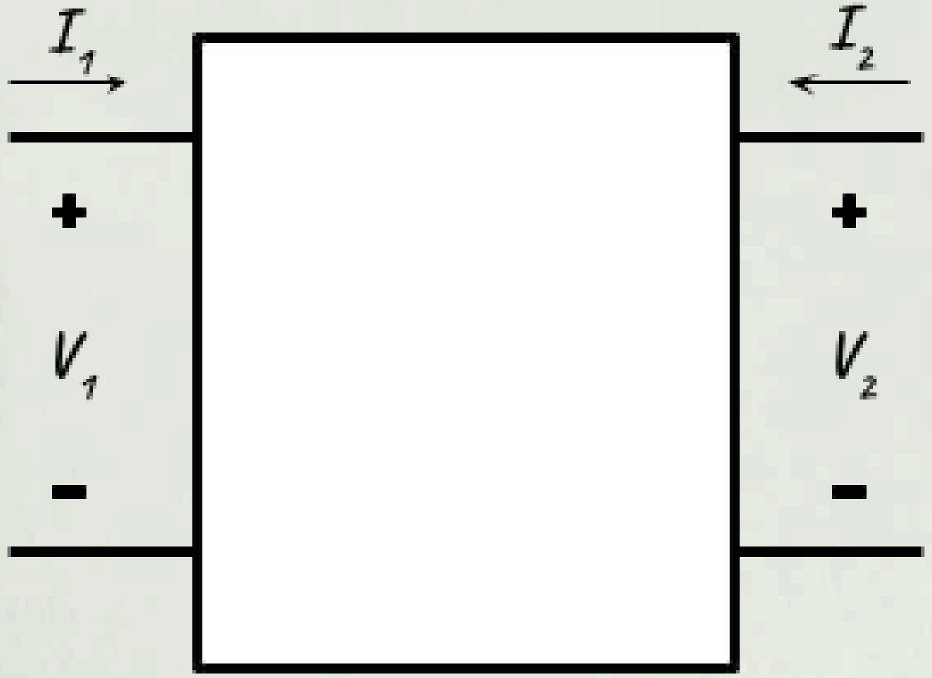
MALLAS DEL CIRCUITO

- Planteamos las ecuaciones Kirchoff de malla del Circuito
- La malla 1 es la de la corriente $I1$
- La malla 2 es la de la corriente $I2$
- Asumimos que hay m-2 mallas más

Observar que solo las mallas 1 y 2 tienen fuente independiente

Cuadripolos

Caja Negra



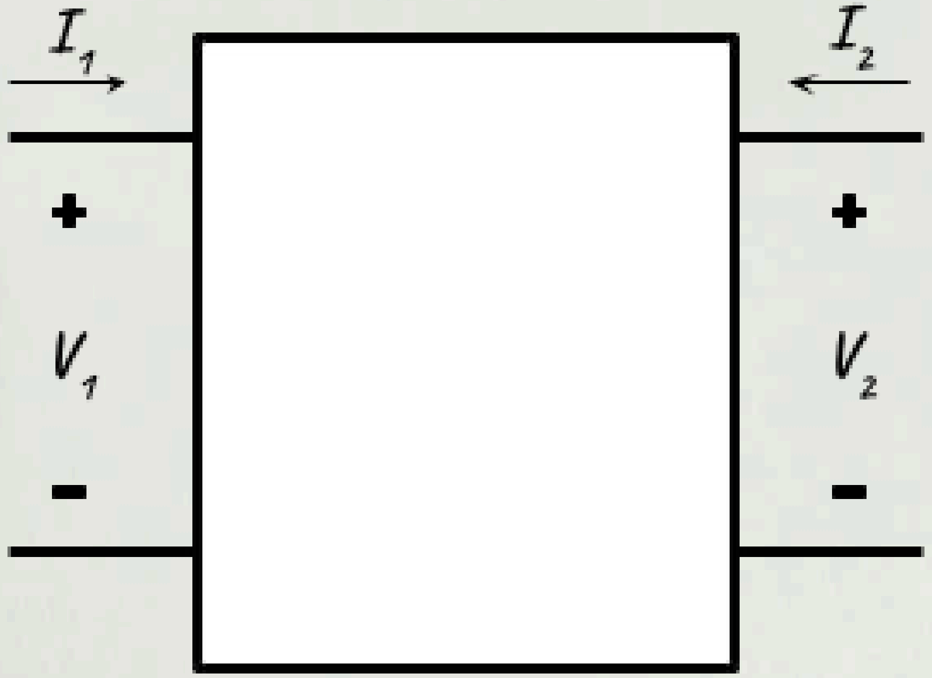
MALLAS DEL CIRCUITO

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \ldots + Z_{1m}I_m$$
$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \ldots + Z_{2m}I_m$$
$$\ldots$$
$$0 = Z_mI_1 + Z_{m2}I_2 + \ldots + Z_{mm}I_m$$

Observar que solo las mallas 1 y 2 tienen fuente independiente

Cuadripolos

Caja Negra



MALLAS DEL CIRCUITO

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = Z_m(s) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_m \end{bmatrix} \rightarrow V(s) = Z_m(s) I(s)$$

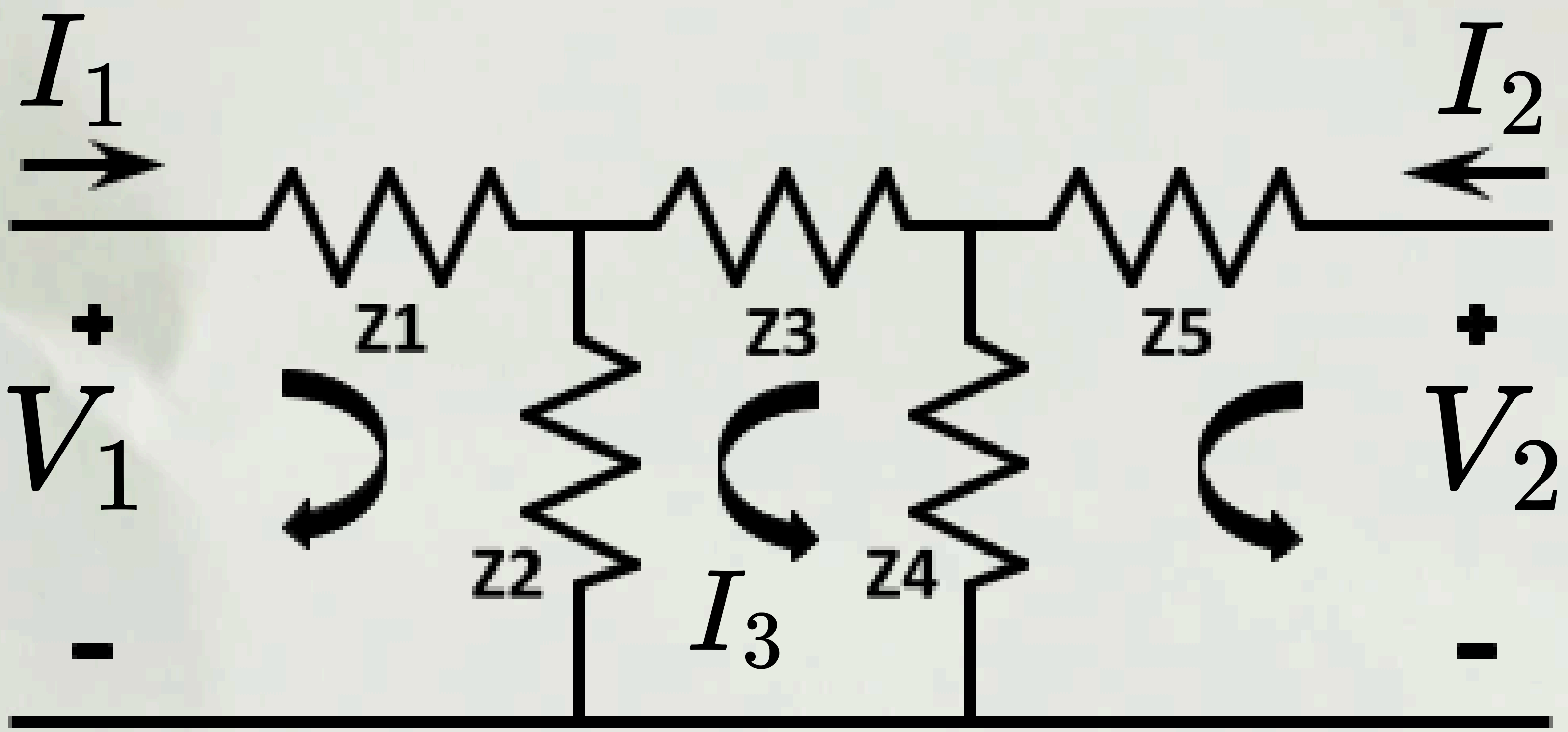
Esta relación entre el vector de tensiones de malla y el vector de corrientes es general

Donde:

$Z_m(s)$ es la matriz de impedancias de mallas

Cuadripolos

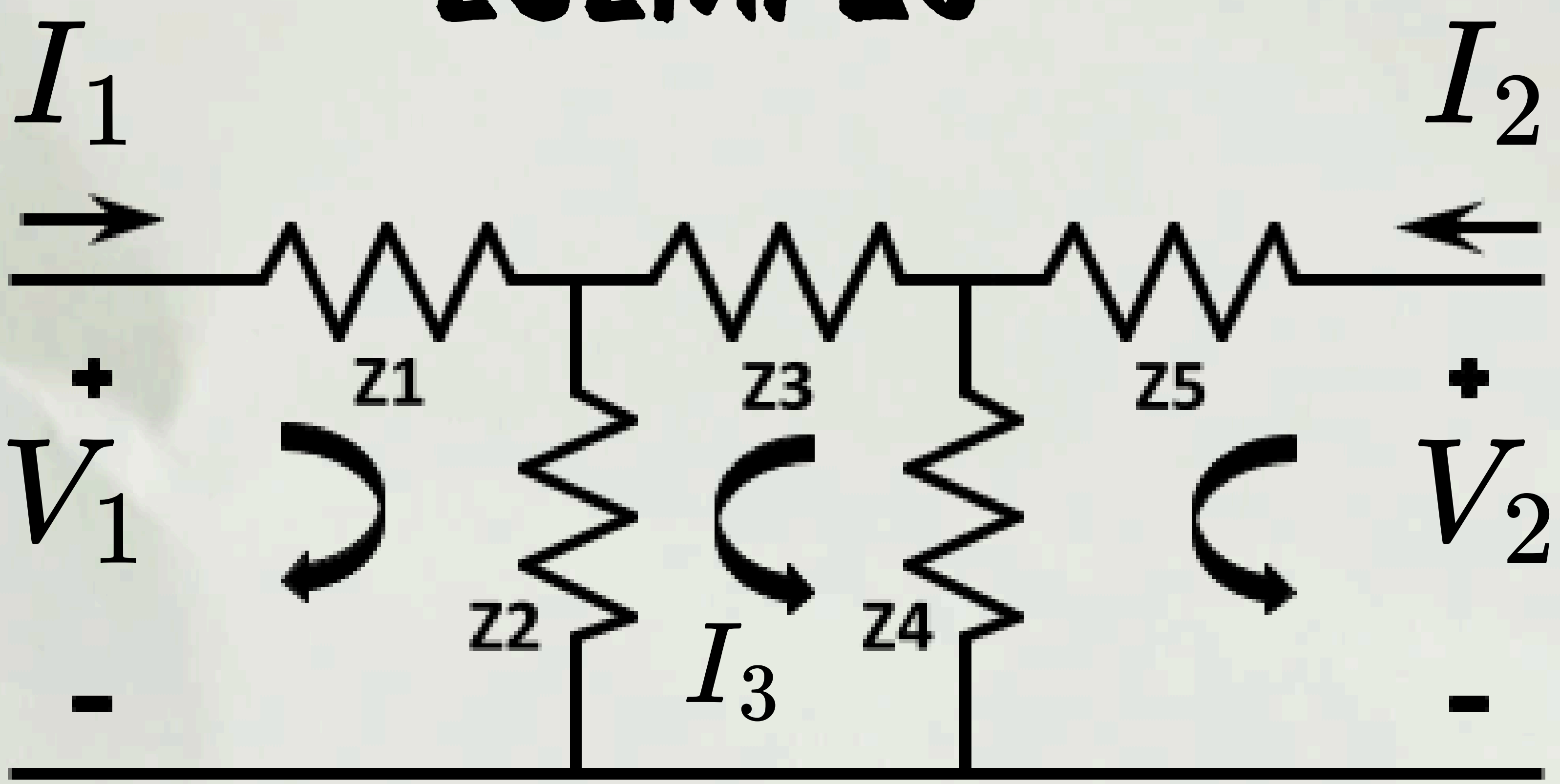
EJEMPLO



$$
\begin{aligned}
V_1 &= \dots \\
V_2 &= \dots \\
0 &= \dots
\end{aligned}
$$

Cuadripolos

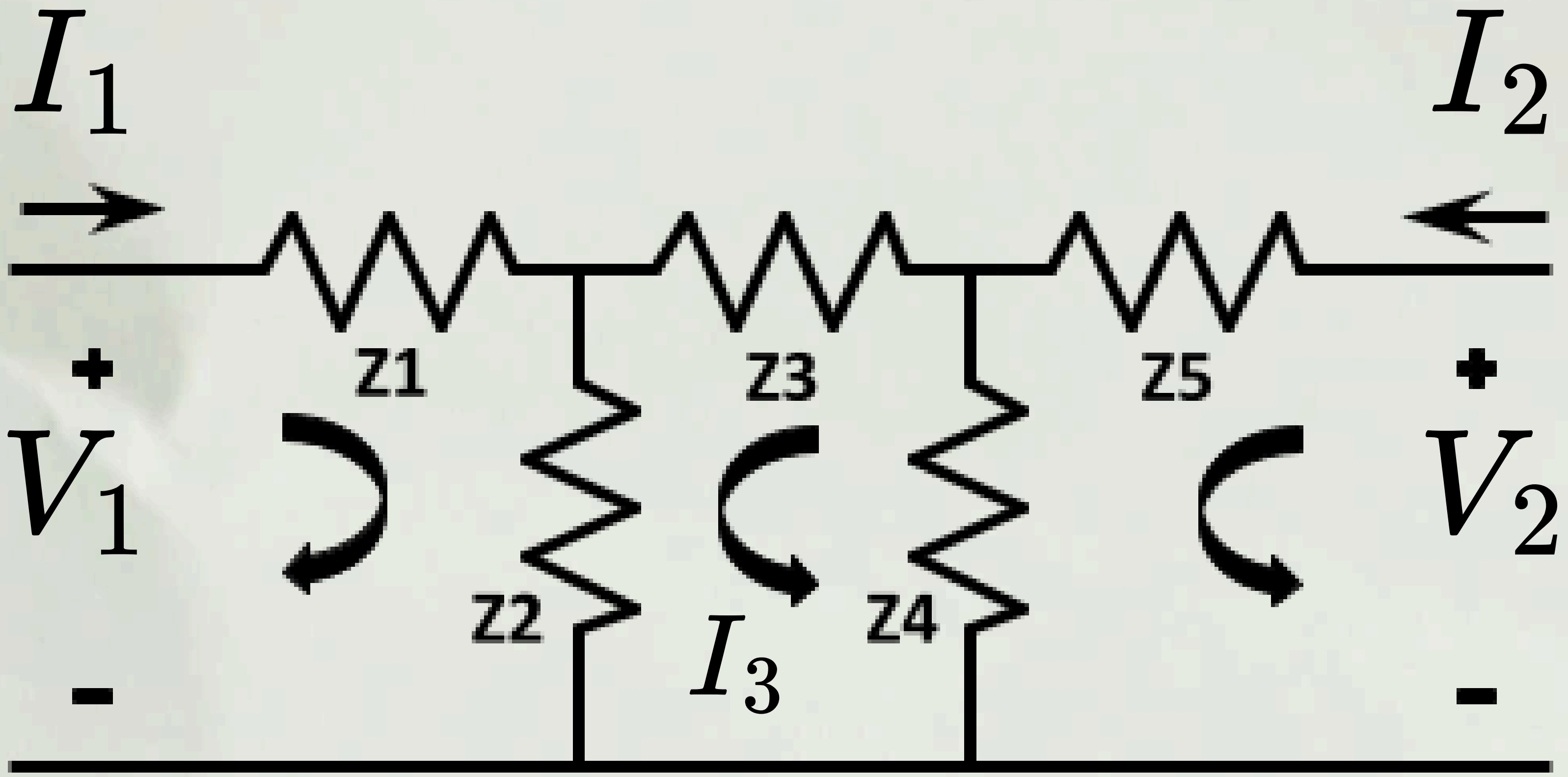
EJEMPLO



$$
\begin{aligned}
V_1 &= Z_1 I_1 + Z_2(I_1 - I_3) \\
V_2 &= Z_5 I_2 + Z_4\left(I_2 + I_3\right) \\
0 &= Z_2\left(I_3 - I_1\right) + Z_3 I_3 + Z_4\left(I_3 + I_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & 0 & -Z_2 \\ 0 & Z_4 + Z_5 & Z_4 \\ -Z_2 & Z_4 & Z_2 + Z_3 + Z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}
$$

Cuadripolos



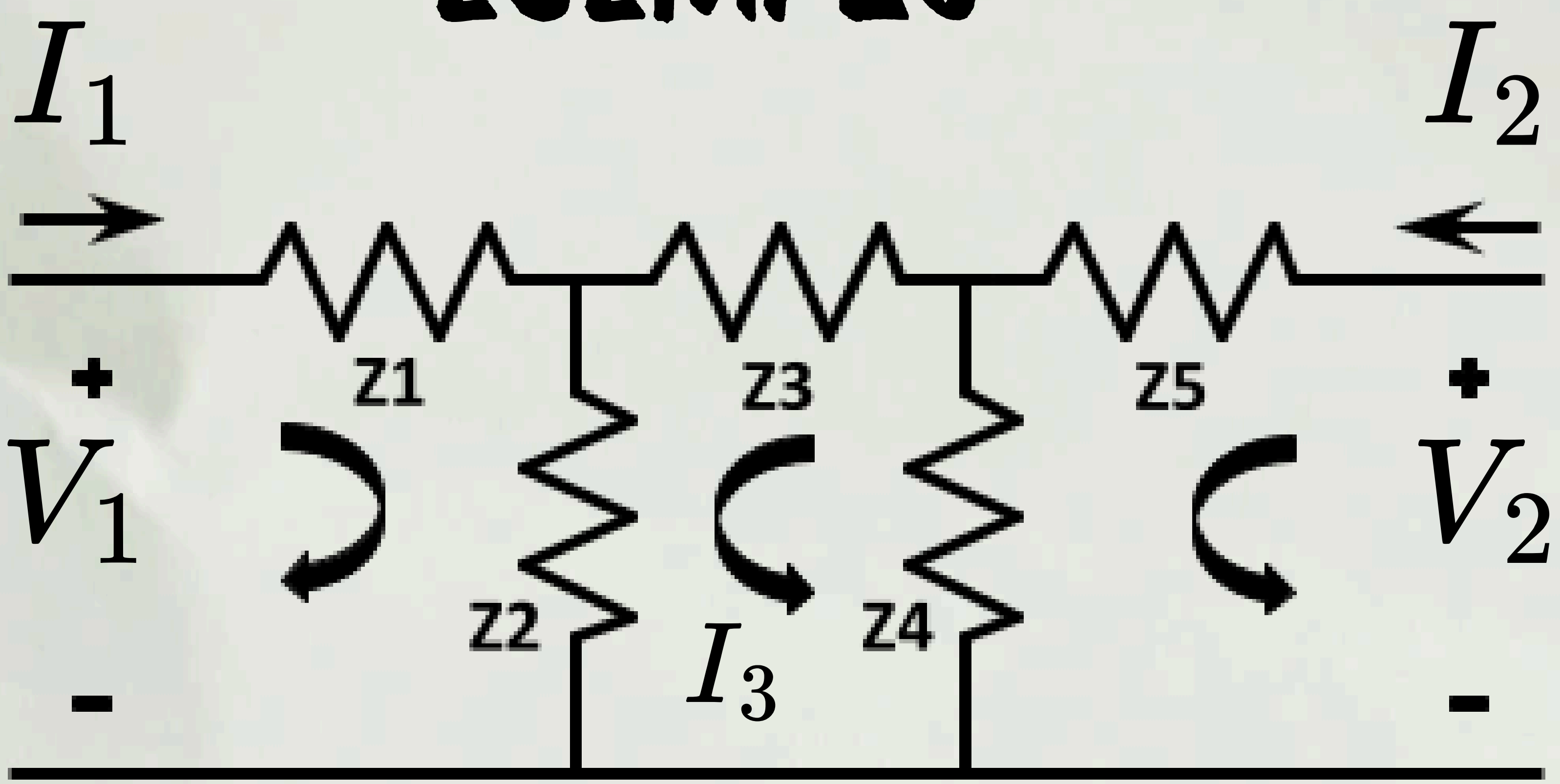
Con herramientas de Algebra Lineal podemos despejar las corrientes 1 y 2 en función de las tensiones:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\
I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2
\end{aligned}
$$

A esas "y" constantes las llamamos Admitancias de Cortocircuito

Cuadripolos

EJEMPLO



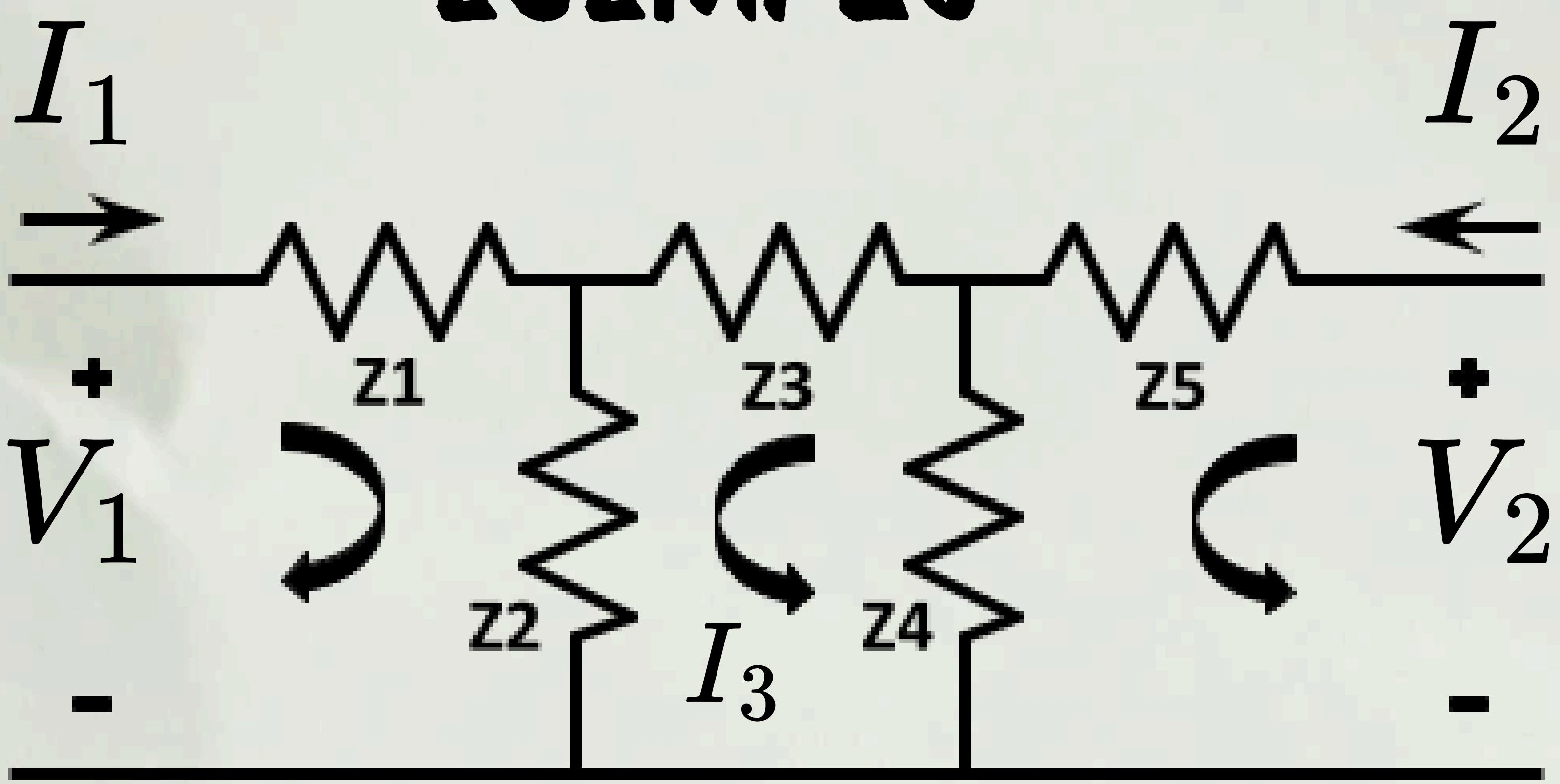
$$\begin{aligned} V_1 &= (Z_1+Z_2)I_1 - Z_2 I_3 \\ V_2 &= (Z_5+Z_4)I_2 + Z_4 I_3 \\ 0 &= (Z_2+Z_3+Z_4)I_3 + Z_4 I_2 - Z_2 I_1 \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{Z_2 I_1}{Z_2+Z_3+Z_4} - \frac{Z_4 I_2}{Z_2+Z_3+Z_4}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} V_1 &= \left(Z_1 + Z_2 - \frac{{Z_2}^2}{Z_2+Z_3+Z_4}\right) I_1 + \frac{Z_2 Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} I_2 \\ V_2 &= \frac{Z_2 Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} I_1 + \left(Z_5 + Z_4 - \frac{Z_4^2}{Z_2+Z_3+Z_4}\right) I_2 \end{aligned}$$

Cuadripolos

EJEMPLO



$$\begin{aligned} V_1 &= (Z_1 + Z_2)I_1 - Z_2 I_3 \\ V_2 &= (Z_5 + Z_4)I_2 + Z_4 I_3 \\ 0 &= (Z_2 + Z_3 + Z_4)I_3 + Z_4 I_2 - Z_2 I_1 \end{aligned}$$

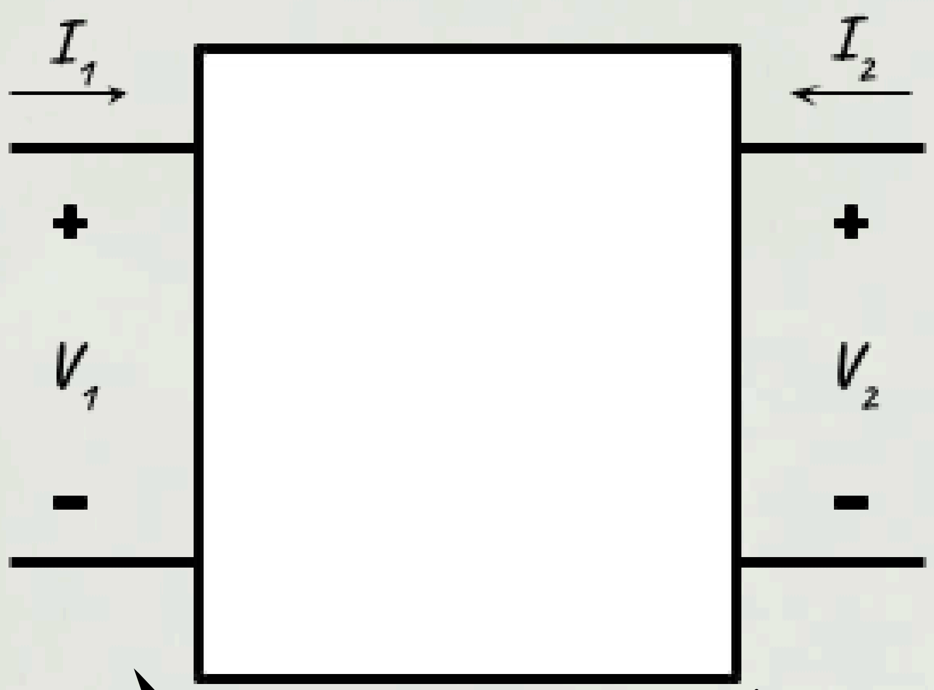
$$I_3 = \frac{Z_2 I_1}{Z_2 + Z_3 + Z_4} - \frac{Z_4 I_2}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} V_1 &= \left(Z_1 + Z_2 - \frac{{Z_2}^2}{Z_2+Z_3+Z_4}\right) I_1 + \frac{Z_2 Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} I_2 \\ V_2 &= \frac{Z_2 Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} I_1 + \left(Z_5 + Z_4 - \frac{Z_4^2}{Z_2+Z_3+Z_4}\right) I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{aligned}$$

Cuadripolos

JUEGOS DE PARÁMETROS

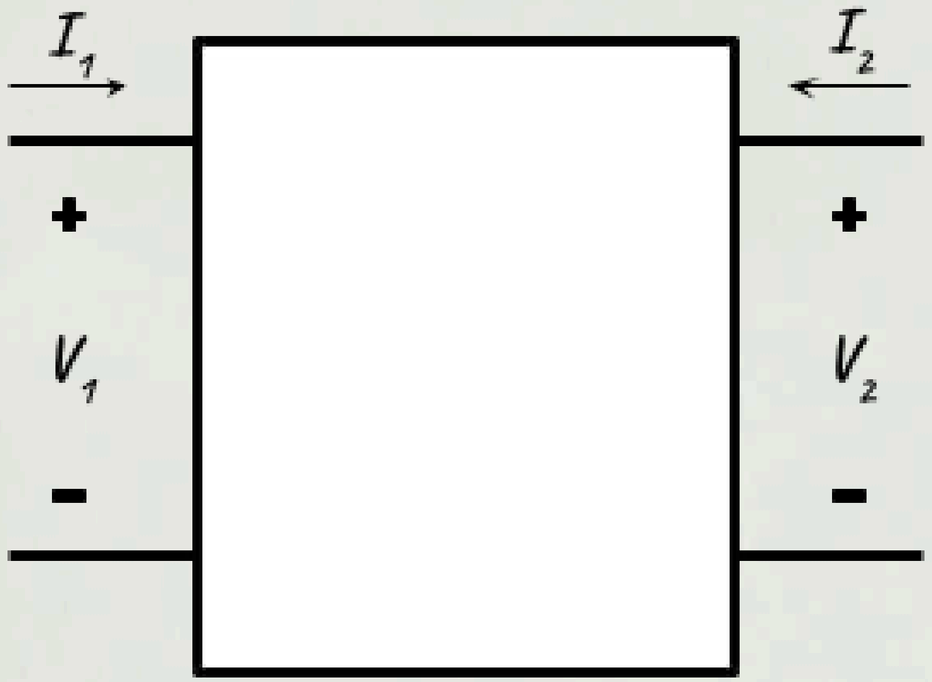


Vimos que podemos escribir las corrientes que entran en funcion de las Tensiones en los terminales

Con la misma idea podemos elegir distintas combinaciones de entradas y salidas

Cada combinación es de utilidad dependiendo del contexto

Cuadripolos



ADMITANCIAS DE CORTOCIRCUITO

Relacionan las tensiones (entradas) con las corrientes (salidas)

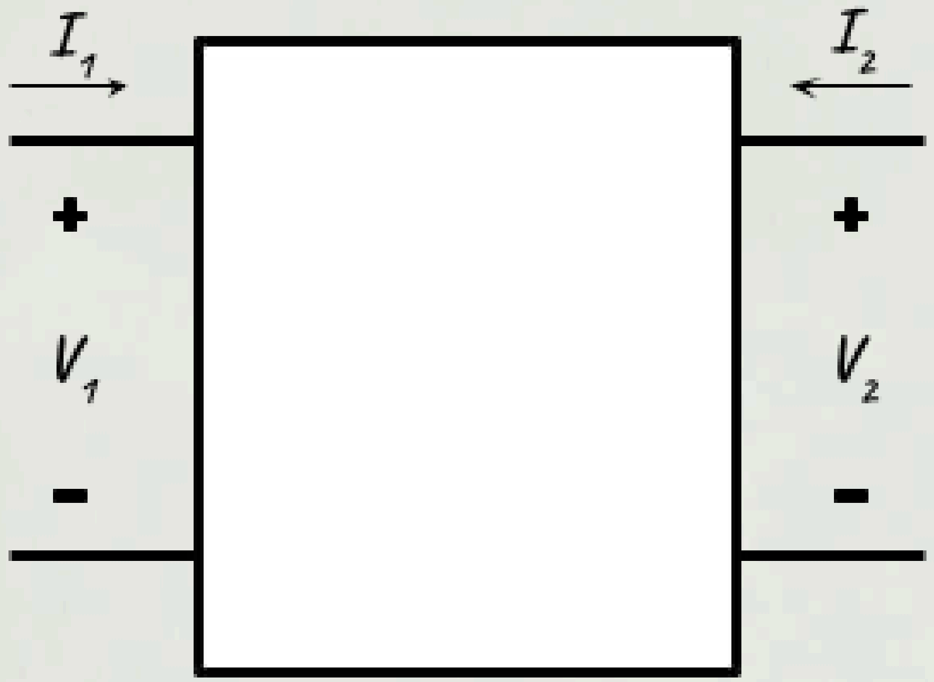
El nombre proviene de la dimension de los parámetros y del procedimiento para hallarlos

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Cuadripolos

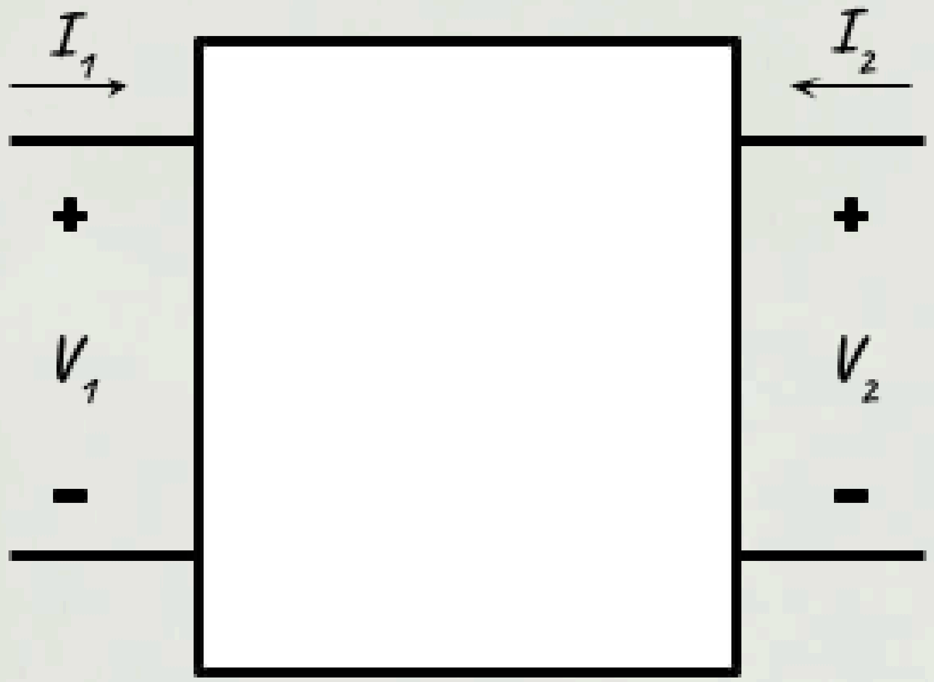
ADMITANCIAS DE CORTOCIRCUITO



$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned}$$

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \quad , \quad y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} , \quad y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \quad , \quad y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

Cuadripolos



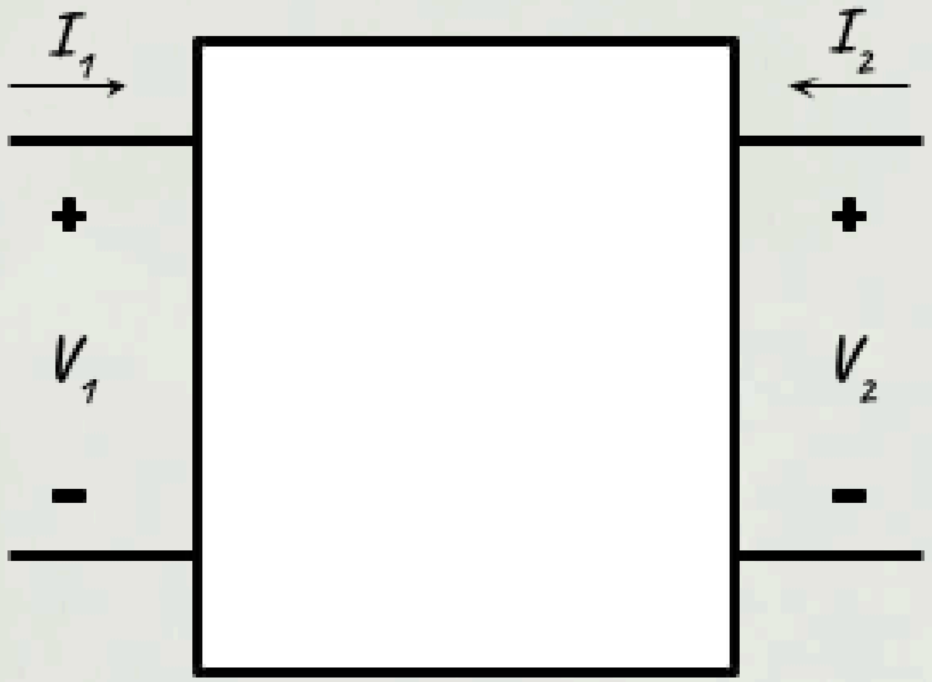
IMPEDANCIAS DE VACIO

Relacionan las corrientes (entradas) con las tensiones (salidas)
El nombre proviene de la dimension de los parámetros y del procedimiento para hallarlos

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Cuadripolos

IMPEDANCIAS DE VACIO

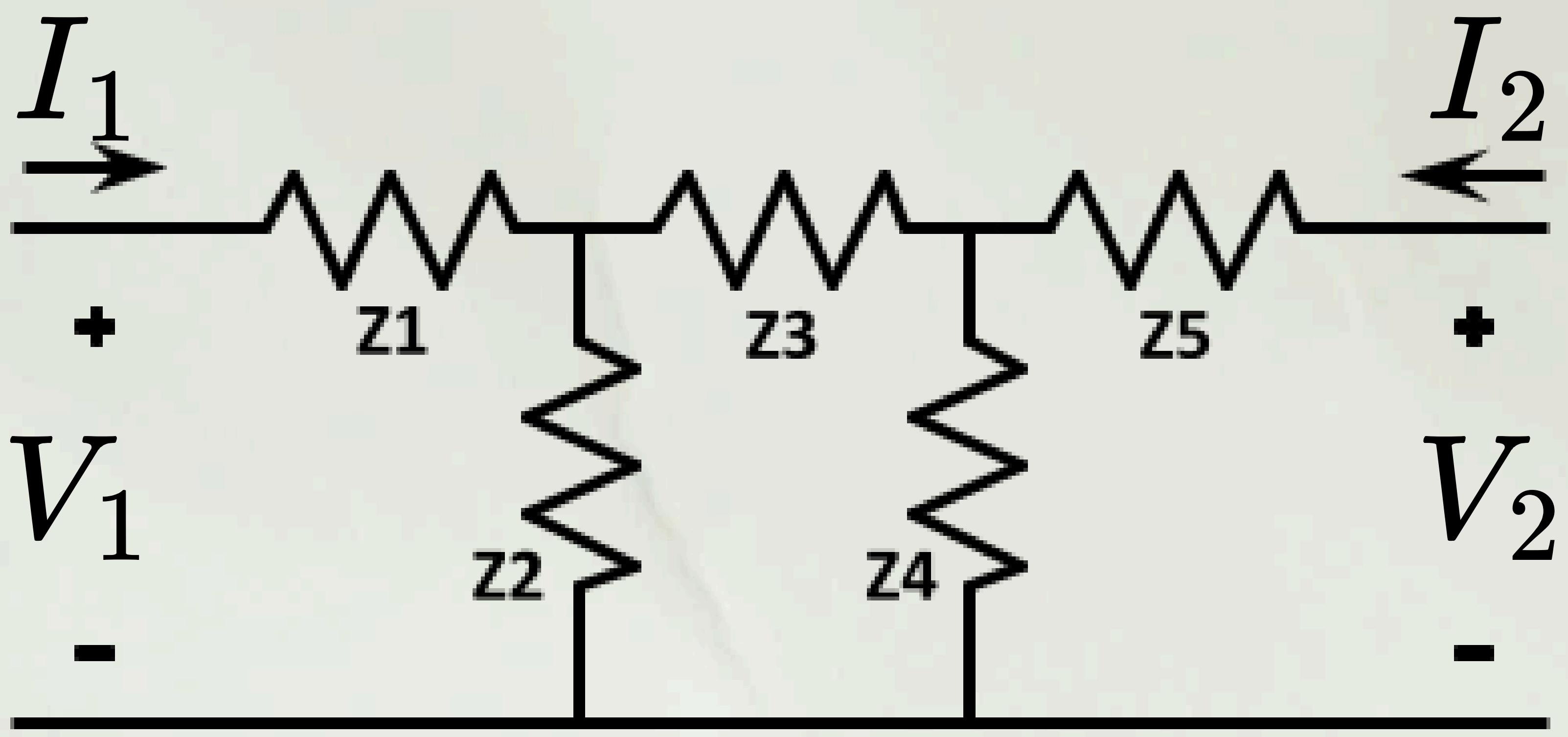


$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{aligned}$$

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \quad , \quad z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \quad , \quad z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \quad , \quad z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

Cuadripolos

$$I_2 = 0$$



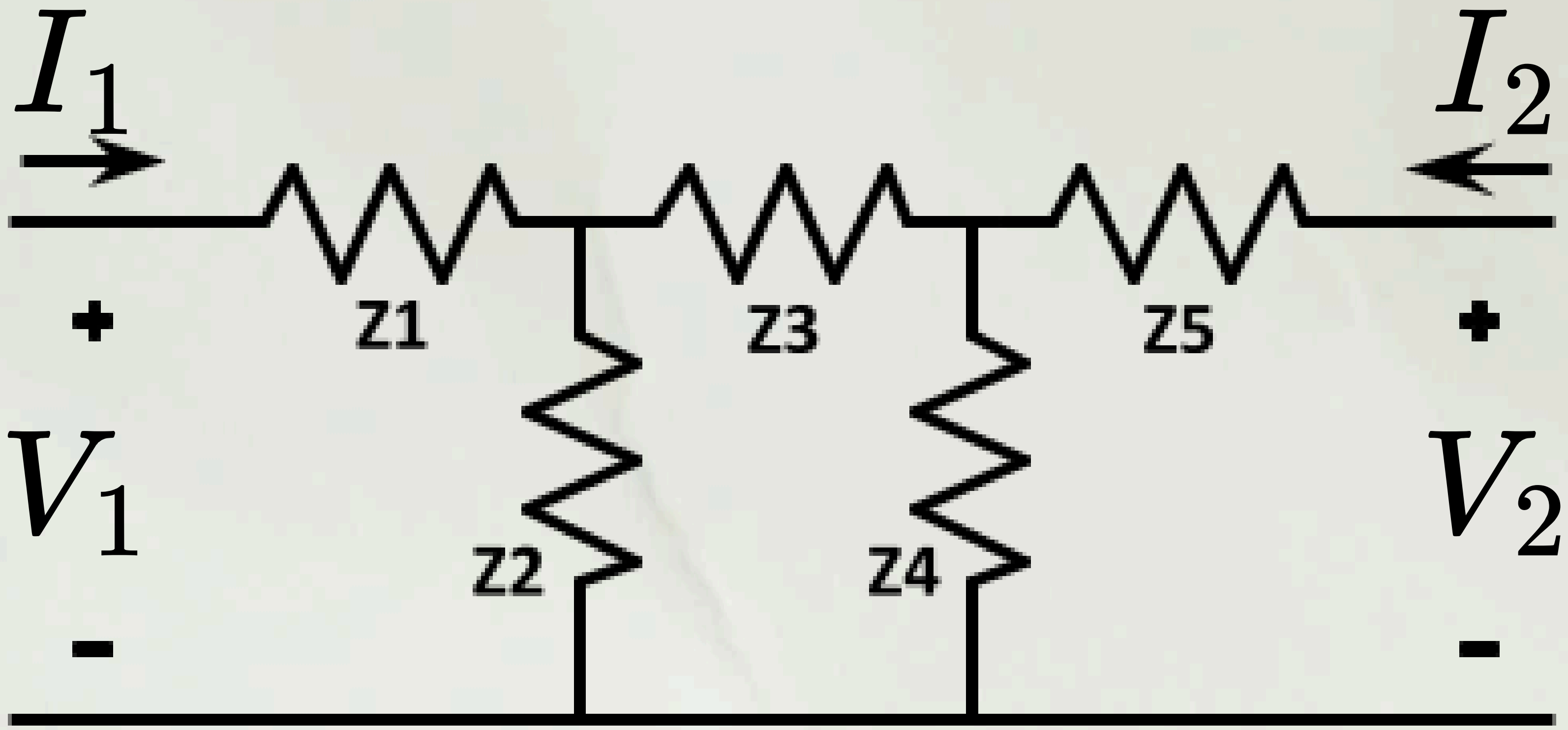
$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \quad , \quad z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

$$V_1 = [z_1 + z_2 \,||\, (z_3 + z_4)]I_1$$

$$V_2 = \left(\frac{z_4}{z_3 + z_4}\right)(z_2 \,||\, (z_3 + z_4))I_1$$

Cuadripolos

$$I_1 = 0$$

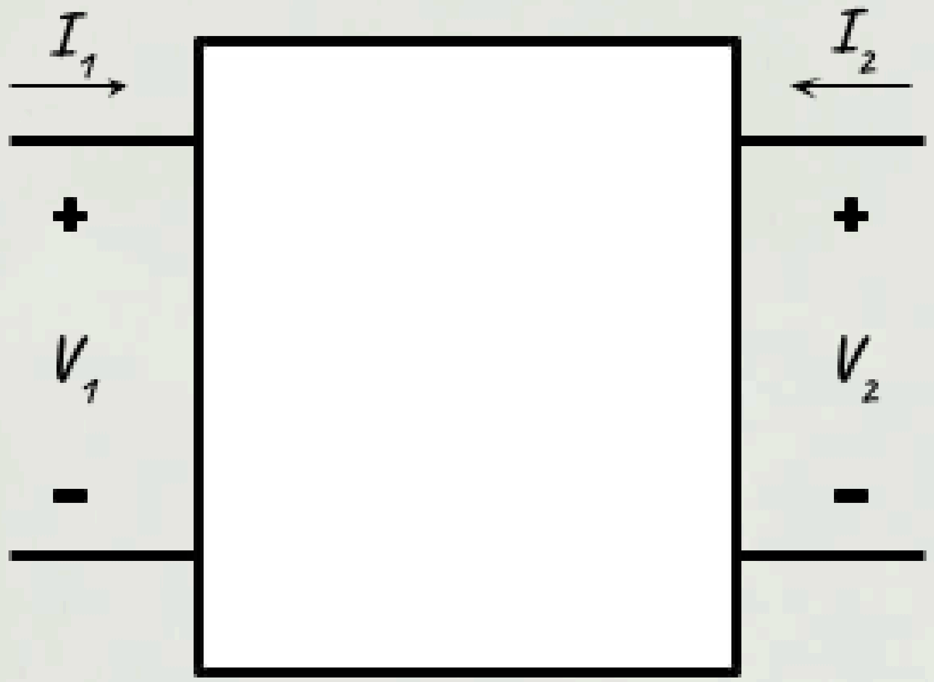


$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \quad , \quad z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

$$V_2 = [z_5 + z_4 \,||\, (z_3 + z_2)]I_2$$

$$V_1 = \left(\frac{z_2}{z_3 + z_2}\right)(z_5 \,||\, (z_3 + z_2))I_2$$

Cuadripolos



EQUIVALENCIAS

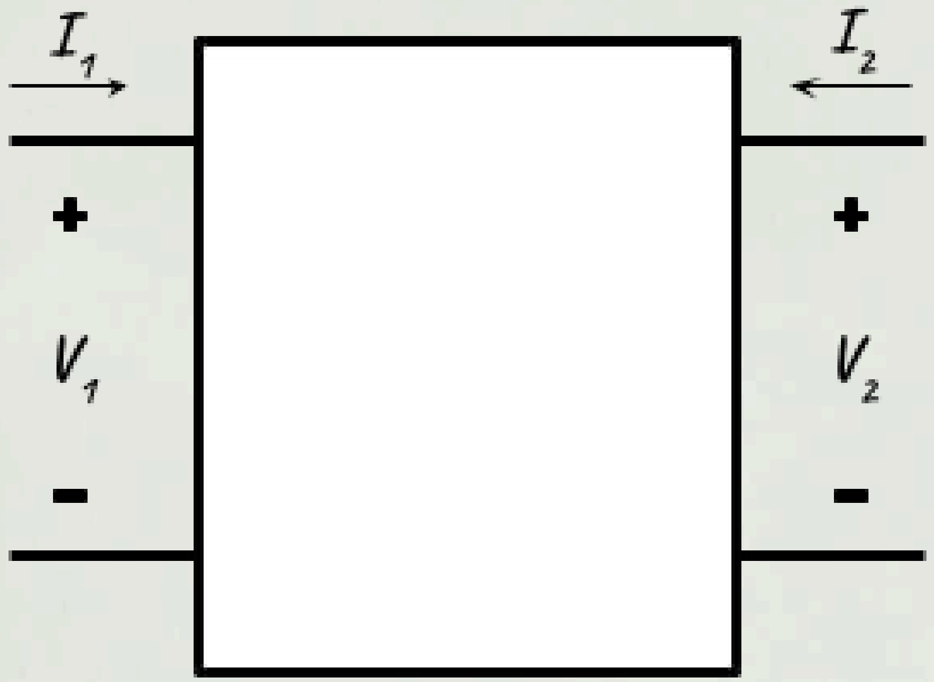
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = Z\left(s\right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y\left(s\right) \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$Z\left(s\right) = Y(s)^{-1}$$

Cuadripolos

CONSTANTES GENERALES



Relacionan las magnitudes del lado 1 (entradas) con las del lado 2 (salidas) Tambien reciben el nombre de parámetros de cadena o de transmisión.

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned}$$

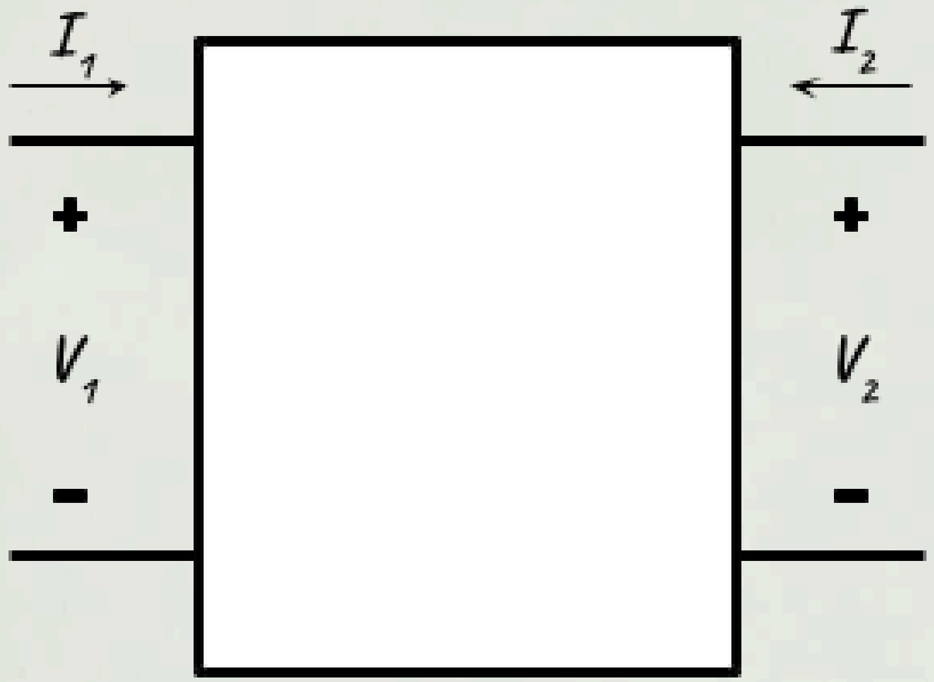
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

El signo de menos refleja que nos importa la corriente que el cuadripolo entrega

Cuadripolos

Se utilizan para modelar el comportamiento de los transistores

PARÁMETROS HÍBRIDOS



Relacionan la tensión de un lado y corriente del otro, con las variables restantes (estan cruzadas)

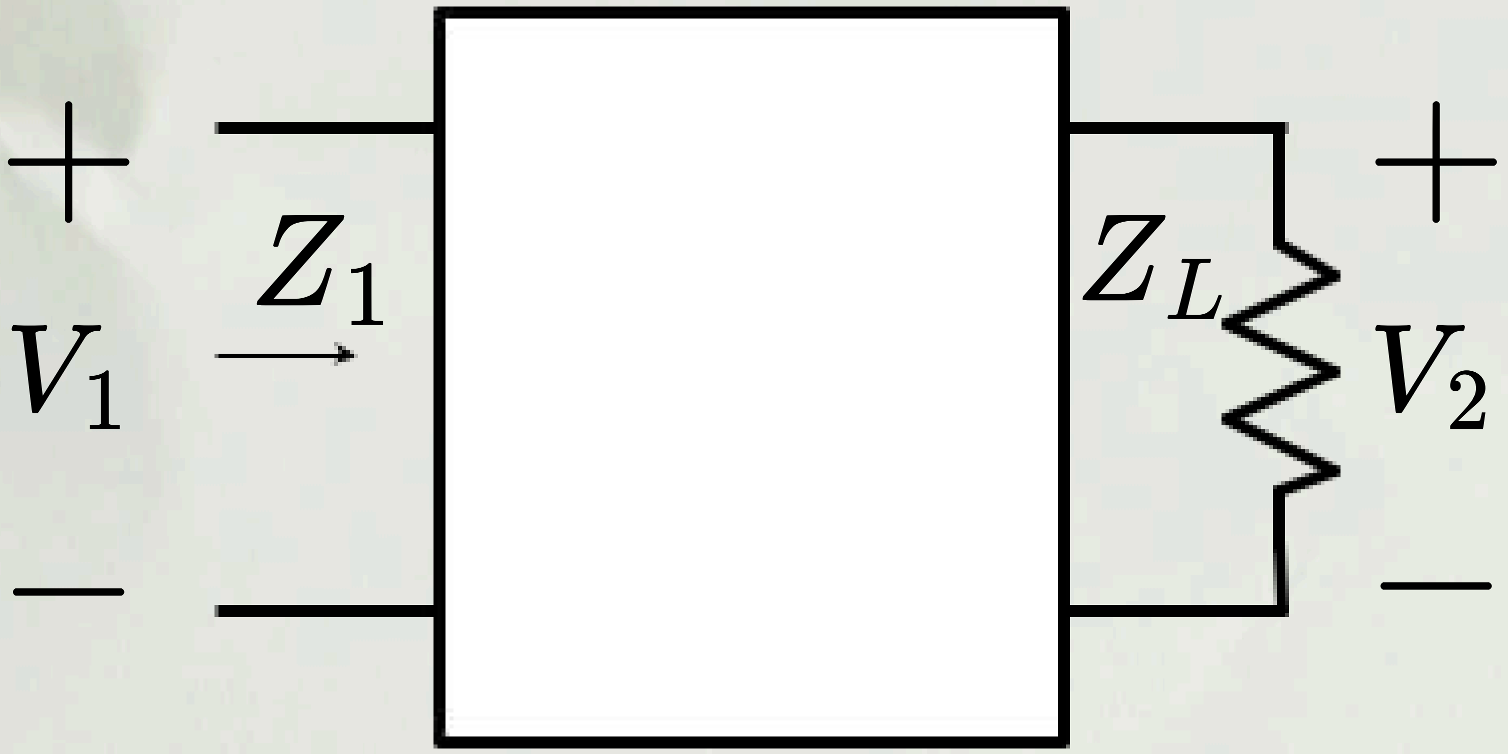
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

RELACIÓN ENTRE PÁRAMETROS

- Cada juego de párametros se puede expresar en función de los demás
- Existen tablas de conversión (se pueden usar en el parcial).
- Trabajando un poco las ecuaciones es fácil despejar unos parametros a partir de los otros

Cuadripolos

EJEMPLO: IMPEDANCIA VISTA



Queremos hallar la impedancia vista del lado 1 cuando se carga el lado 2:

Usemos la caracterización en constantes generales:

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BI_2 \\ I_1 &= CV_2 - DI_2 \end{aligned}$$

Ley de Ohm en la impedancia: $Z_L = \dfrac{V_2}{-I_2}$

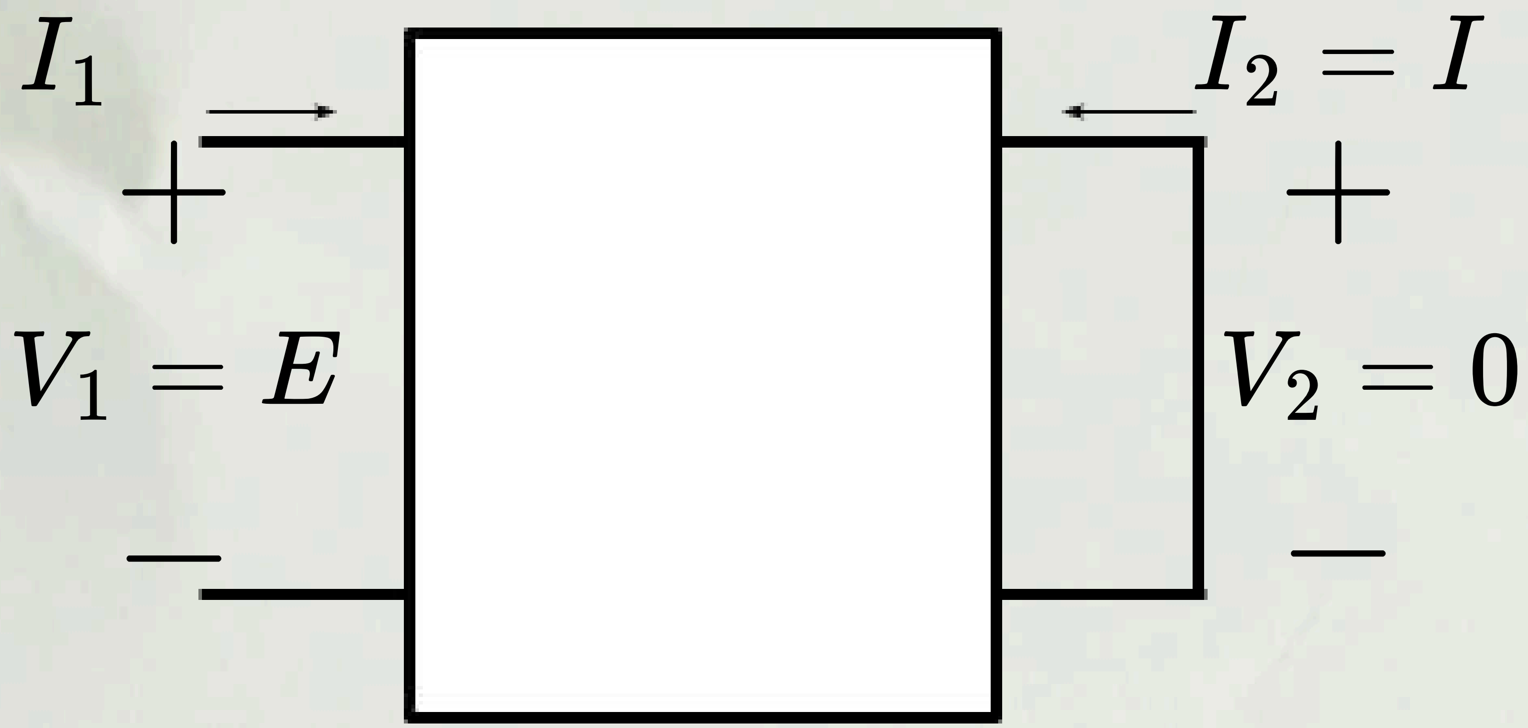
Despejando:

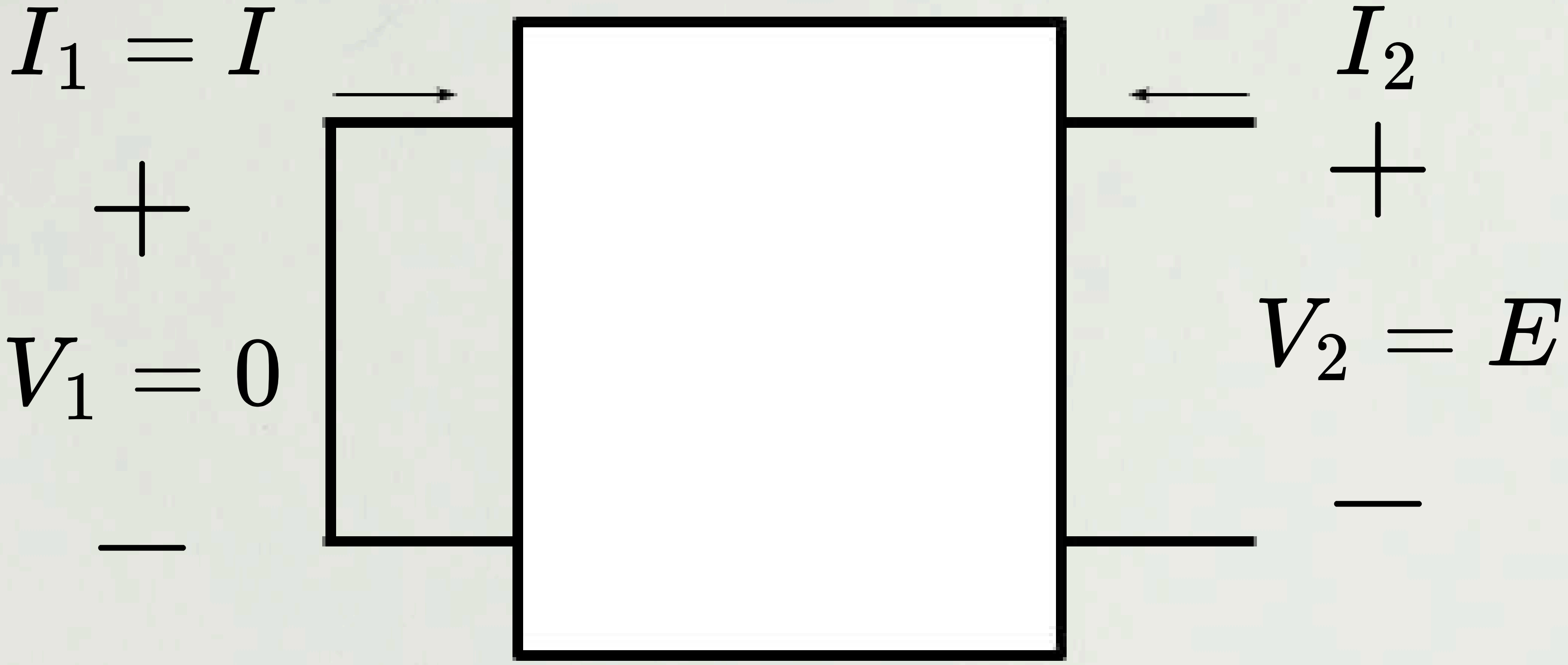
$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{-AZ_LI_2 - BI_2}{-CZ_LI_2 - DI_2} \Rightarrow Z_1 = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

Cuadripolos

Un cuadripolo
reciproco se
describe por 3
parámetros

RECIPROCIDAD





DEFINICIÓN:

La relación respuesta exitación es invariante frente a un cambio de posición entrada con salida.

EN LOS PARÁMETROS

$$y_{12} = y_{21} \qquad z_{12} = z_{21}$$

$$g_{12} = -g_{21} \quad h_{12} = -h_{21}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \frac{z_{12}}{z_{21}} = 1$$

Cuadripolos

Un cuadripolo simétrico se describe por 2 parámetros

SIMETRÍA

DEFINICIÓN:

- Para ser simetrico tiene que ser reciproco
- Además hay igualdad de respuestas ante entradas de un mismo lado
- Implica que las impedancias vistas de entrada y salida son iguales
- Lados 1 y 2 indistinguibles

EN LOS PARÁMETROS

$$y_{12} = y_{21} \qquad z_{12} = z_{21}$$

$$y_{11} = y_{22} \qquad z_{11} = z_{22}$$

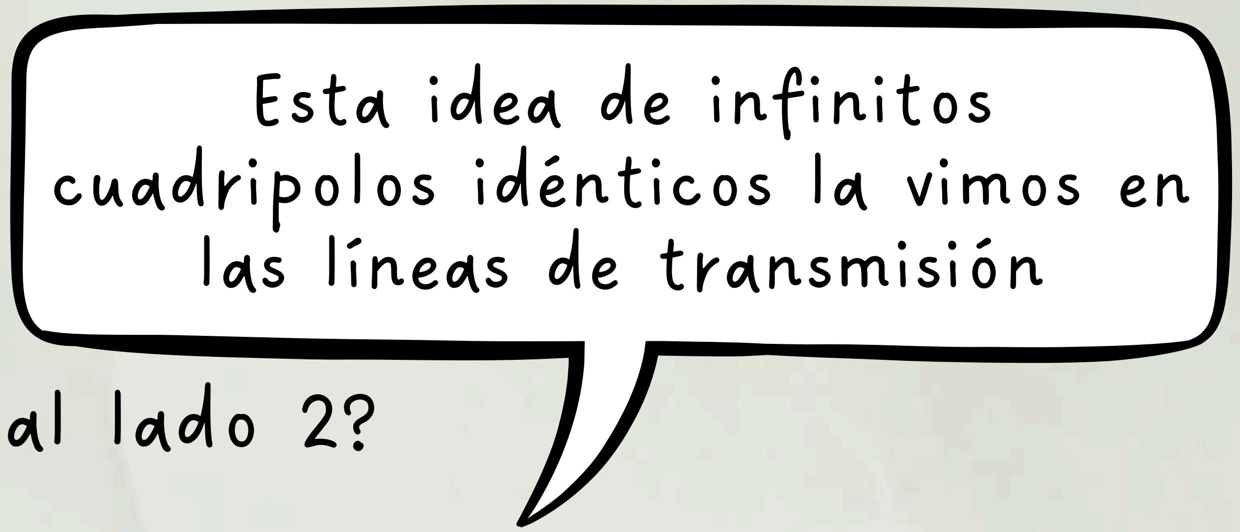
$$g_{12} = -g_{21} \quad h_{12} = -h_{21}$$

$$A = D \qquad \Delta_H = \Delta_G = 1$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \frac{z_{12}}{z_{21}} = 1$$

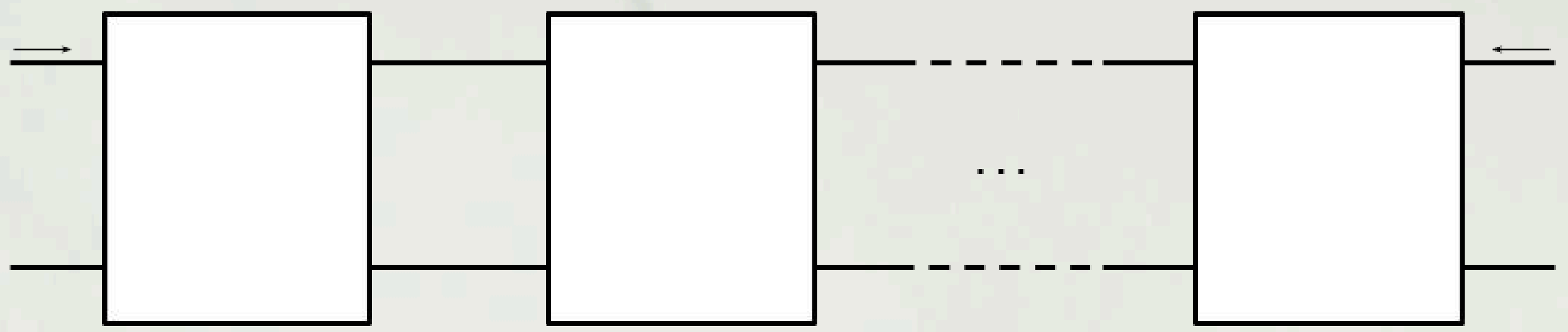
Cuadripolos

EJEMPLO: IMPEDANCIA ITERATIVA



¿Es posible que una impedancia que pase incambiada del lado 1 al lado 2?

Esto equivale a considerar una cadena infinita de cuadripolos idénticos:



Usemos la caracterización en constantes generales:

$$Z_1 = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} = Z_L$$

$$CZ_L^2 + (D - A)Z_L - B = 0 \Rightarrow Z_L = \frac{A - D \pm \sqrt{A^2 - 2AD + D^2 + 4BC}}{2C}$$

<u>Si el Cuadripolo es simétrico:</u>

$$\begin{cases} A = D \\ AD - BC = 1 \end{cases} \Rightarrow Z_L = \pm\sqrt{\frac{B}{C}}$$

Si es real se denomina impedancia característica

Cuadripolos

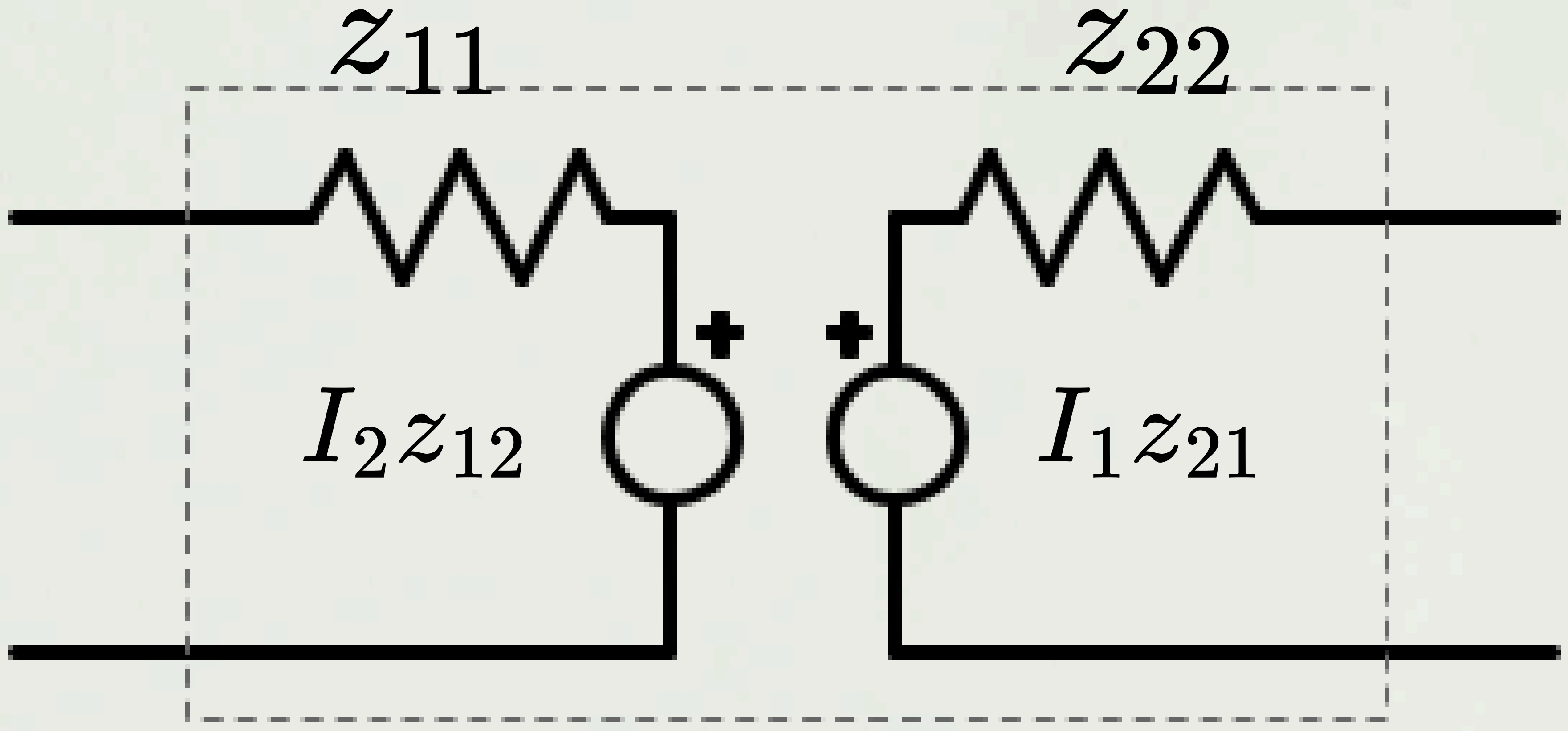
EQUIVALENCIA

Dos cuadripolos son equivalentes si se describen por los mismos parámetros

Podemos modelar un circuito complejo por uno mucho más simple

IMPEDANCIAS DE VACIO

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

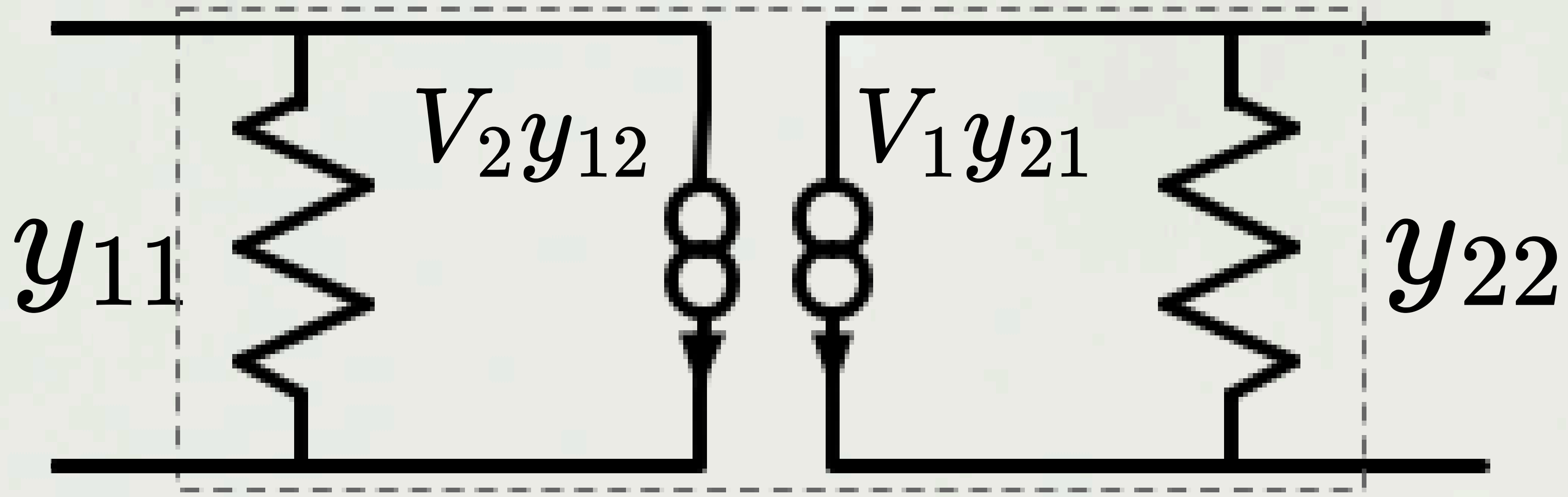


Cuadripolos

EQUIVALENCIA

ADMITANCIAS DE CORTOCIRCUITO

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

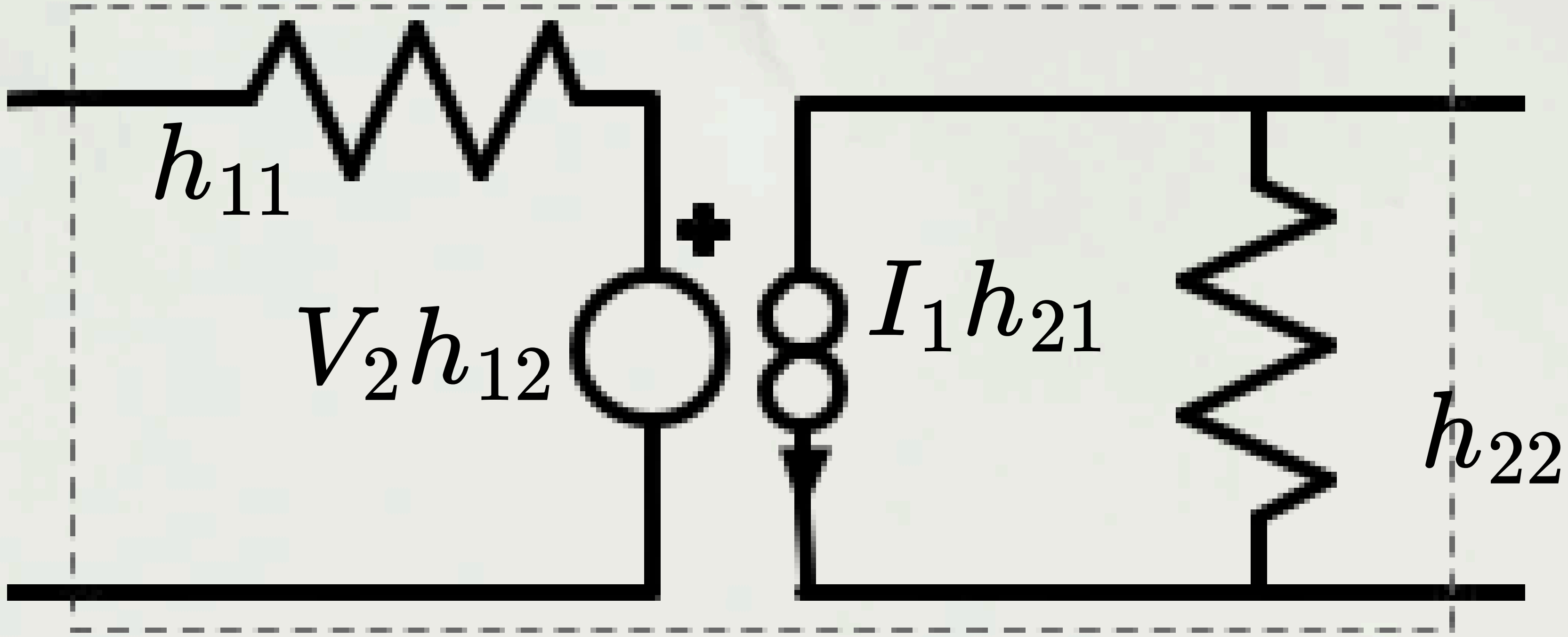


Cuadripolos

EQUIVALENCIA

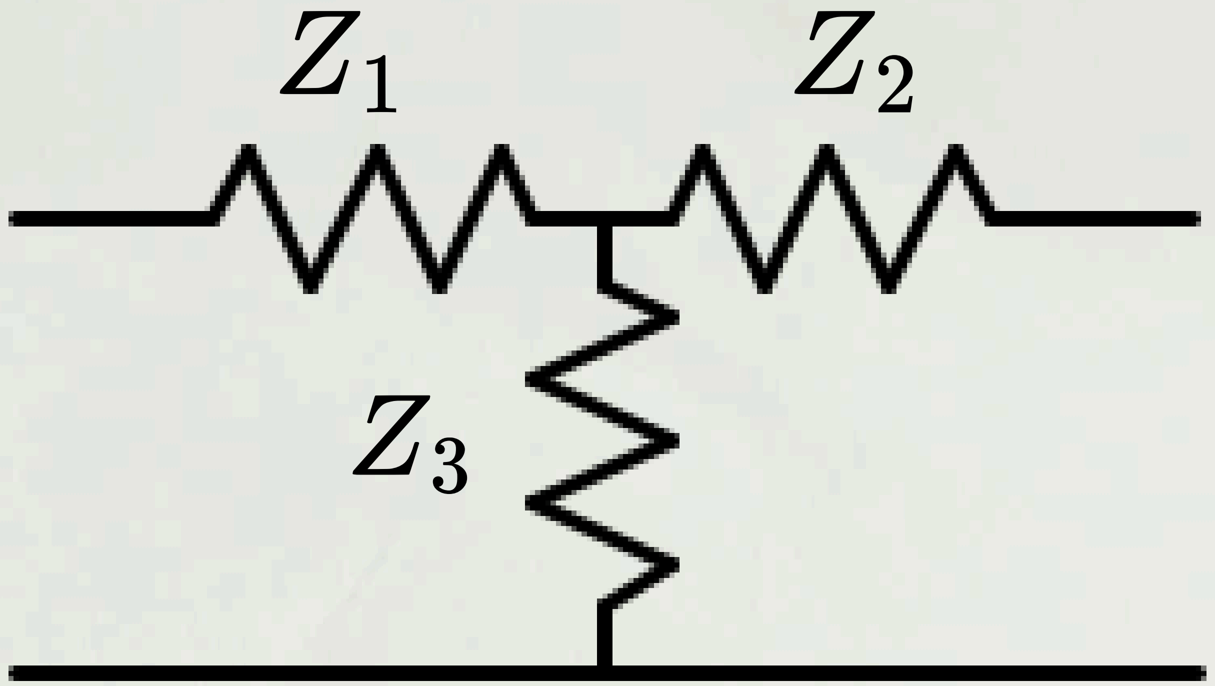
PARÁMETROS HÍBRIDOS

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



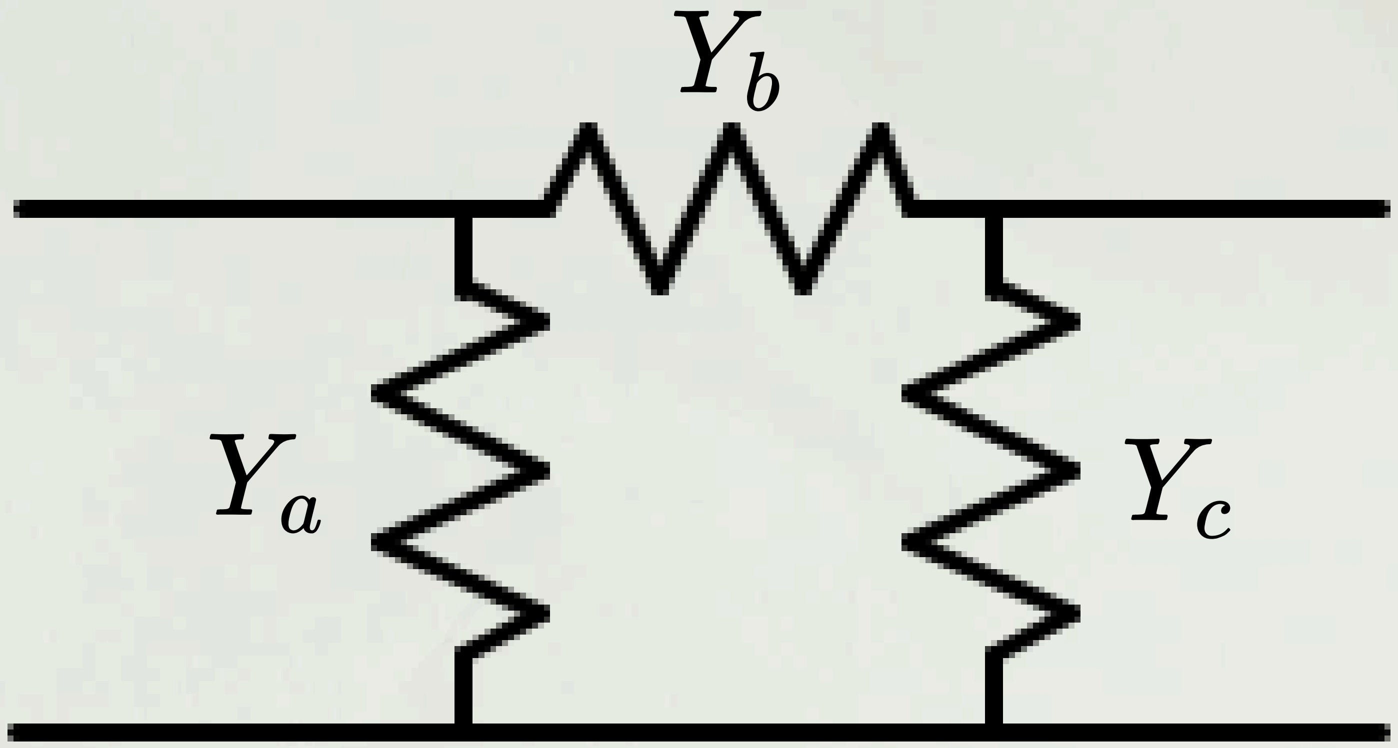
Cuadripolos

EQUIVALENTE T (RECÍPROCO)



$$\begin{cases} z_{11} &= Z_1 + Z_3 \\ z_{22} &= Z_2 + Z_3 \\ z_{12} &= z_{21} = Z_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Z_1 &= z_{11} - z_{12} \\ Z_2 &= z_{22} - z_{12} \\ Z_3 &= z_{12} \end{cases}$$

EQUIVALENTE π (RECÍPROCO)

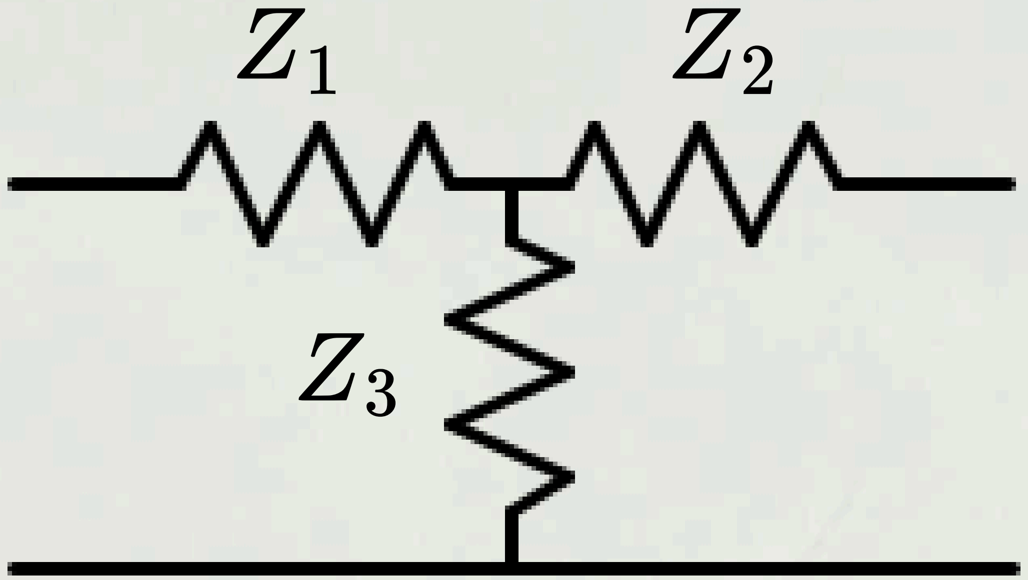


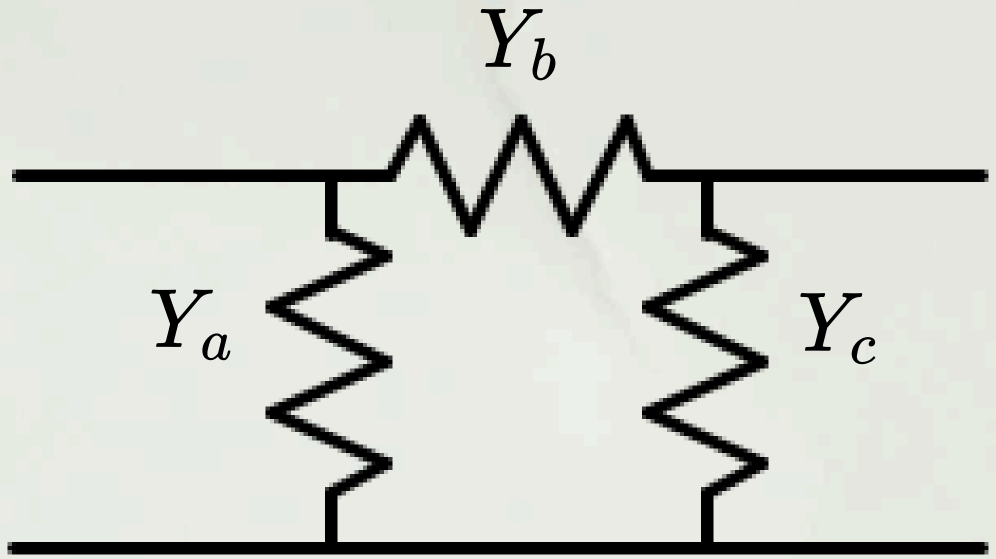
$$\begin{cases} y_{11} & = & Y_a + Y_b \\ y_{22} & = & Y_b + Y_c \\ y_{12} & = & y_{21} = -Y_b \end{cases} \iff \begin{cases} Y_a & = & y_{11} + y_{12} \\ Y_b & = & -y_{12} = -y_{21} \\ Y_c & = & y_{22} + y_{12} \end{cases}$$

Cuadripolos

TRANSFIGURACIÓN ESTRELLA TRIANGULO

Podemos convertir un equivalente T en un equivalente π



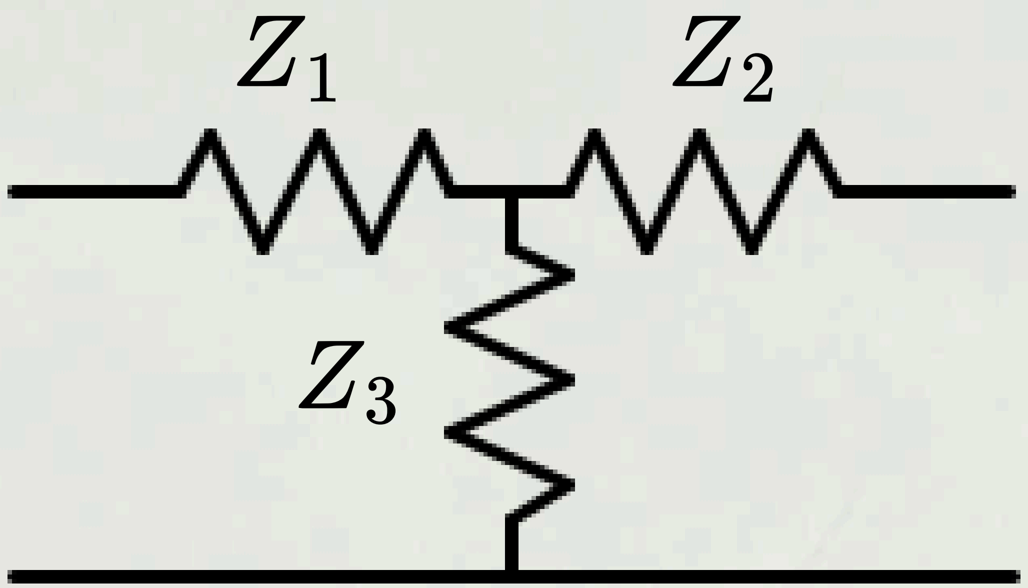


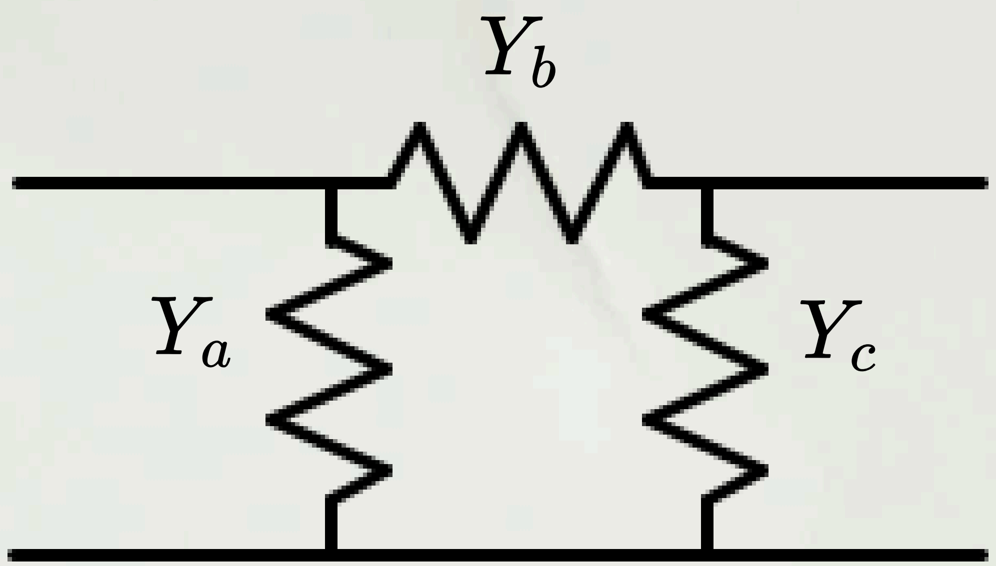
Partimos de las impedancias en estrella, con el modelo en impedancias de vacio

$$\begin{cases} z_{11} = Z_1 + Z_3 \\ z_{22} = Z_2 + Z_3 \\ z_{12} = z_{21} = Z_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_Z} \\ y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_Z} \\ y_{12} = y_{21} = -\frac{z_{12}}{\Delta_Z} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Y_a = \frac{z_{22}-z_{12}}{\Delta_Z} \\ Y_b = \frac{z_{12}}{\Delta_Z} \\ Y_c = \frac{z_{11}-z_{12}}{\Delta_Z} \end{cases}$$

TRANSFIGURACIÓN ESTRELLA TRIANGULO

Si las tres impedancias son idénticas:



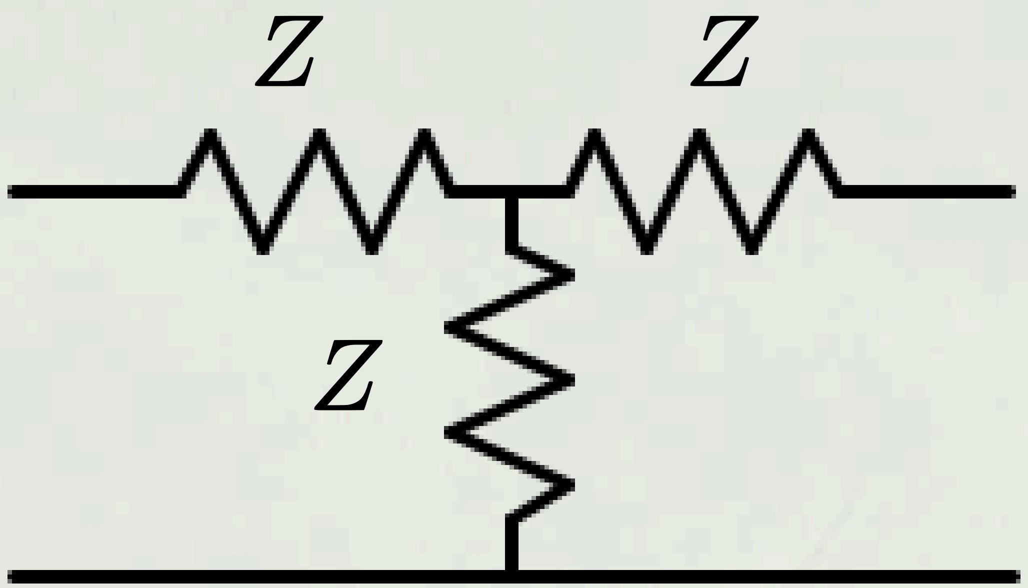


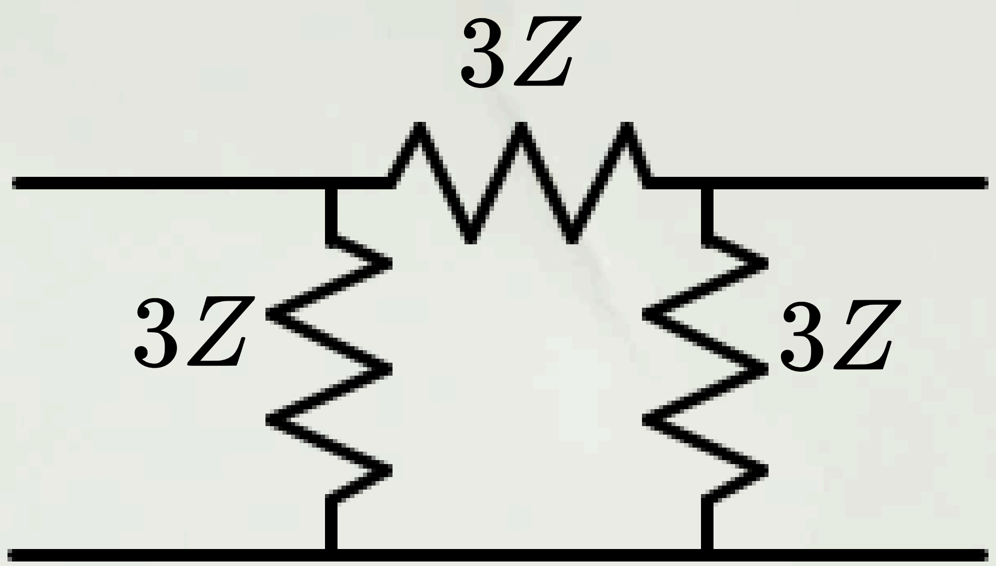
$$\begin{cases} z_{11} & = & 2Z \\ z_{22} & = & 2Z \\ z_{12} & = & Z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_{11} & = & \frac{2}{3Z} \\ y_{22} & = & \frac{2}{3Z} \\ y_{12} & = & y_{21} = \frac{1}{3Z} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Y_a & = & \frac{1}{3Z} \\ Y_b & = & \frac{1}{3Z} \\ Y_c & = & \frac{1}{3Z} \end{cases}$$

$$\Delta_Z = 4Z^2 - Z^2 = 3Z^2$$

Cuadripolos

¡El triángulo equivalente tiene impedancias idénticas tres veces más grandes!





- Se aplica en diversos contextos del análisis de circuitos.
- Herramienta fundamental en el análisis de <u>circuitos trifásicos</u>!!

Cuadripolos

INTERCONEXIÓN

- La interconexión de cuadripolos puede describirse de manera sencilla en función de los juegos de parámetros.
- Cada esquema de conexión se entiende mejor con un determinado juego de parámetros.
- Es importante tener presente que el cuadripolo resultante de la interconexión debe verificar las hipótesis que permitan la descripción mediante un juego de parámetros.

Cuadripolos

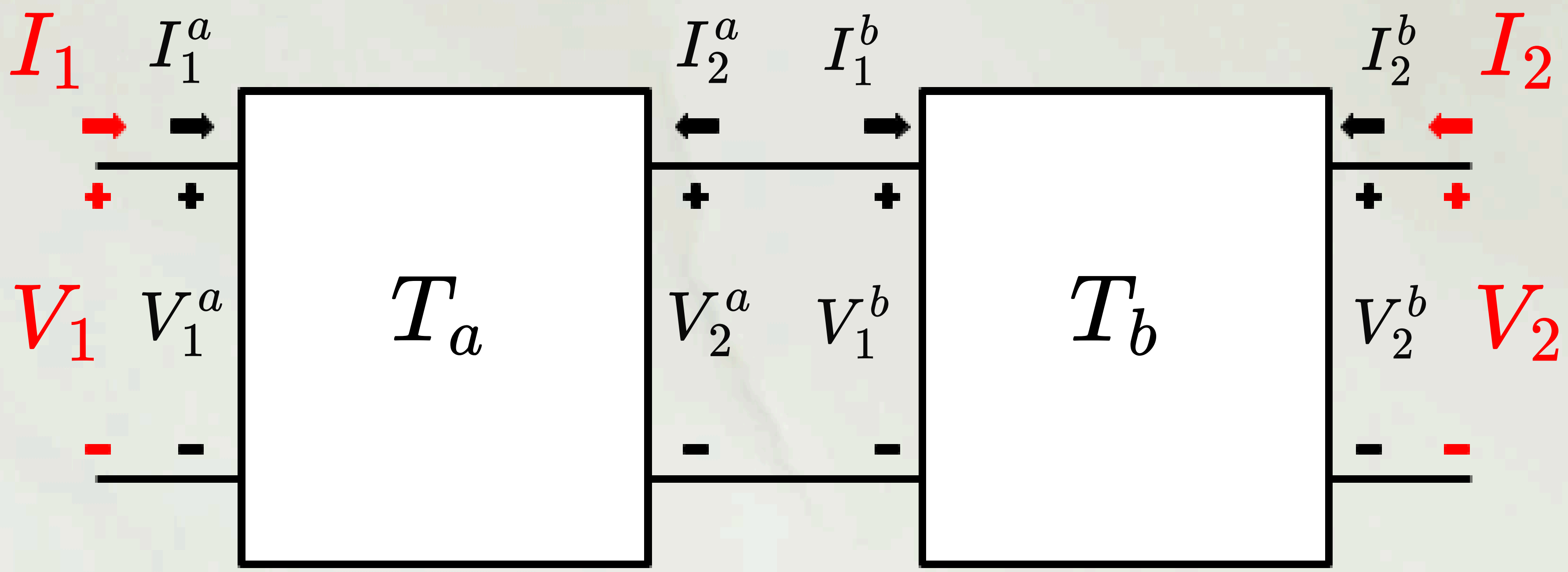
CONEXIÓN EN CASCADA

$$\begin{bmatrix} V_1^b \\ I_1^b \end{bmatrix} = T_b \begin{bmatrix} V_2^b \\ -I_2^b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2^a \\ -I_2^a \end{bmatrix} = T_b \begin{bmatrix} V_2^b \\ -I_2^b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1^a \\ I_1^a \end{bmatrix} = T_a \begin{bmatrix} V_2^a \\ -I_2^a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1^a \\ I_1^a \end{bmatrix} = T_a T_b \begin{bmatrix} V_2^b \\ -I_2^b \end{bmatrix}$$

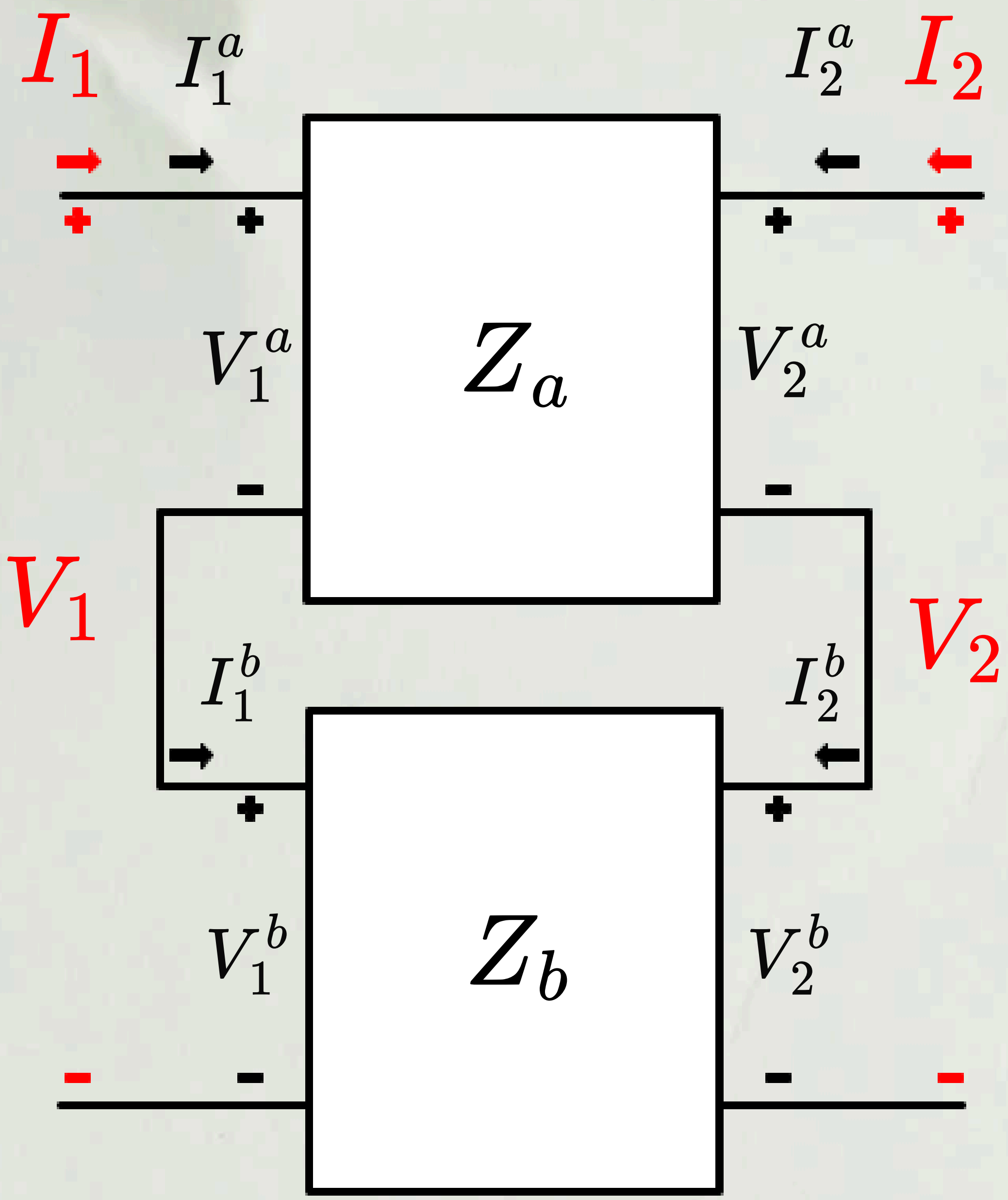


$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^a & V_1 &= V_1^a & V_1^b &= V_2^a \\ I_2 &= I_2^b & V_2 &= V_2^b & I_1^b &= -I_2^a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = T_a T_b \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Cuadripolos

SERIE - SERIE



$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^a + V_1^b \\ V_2 &= V_2^a + V_2^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^a = I_1^b \\ I_2 &= I_2^b = I_2^a \end{aligned}$$

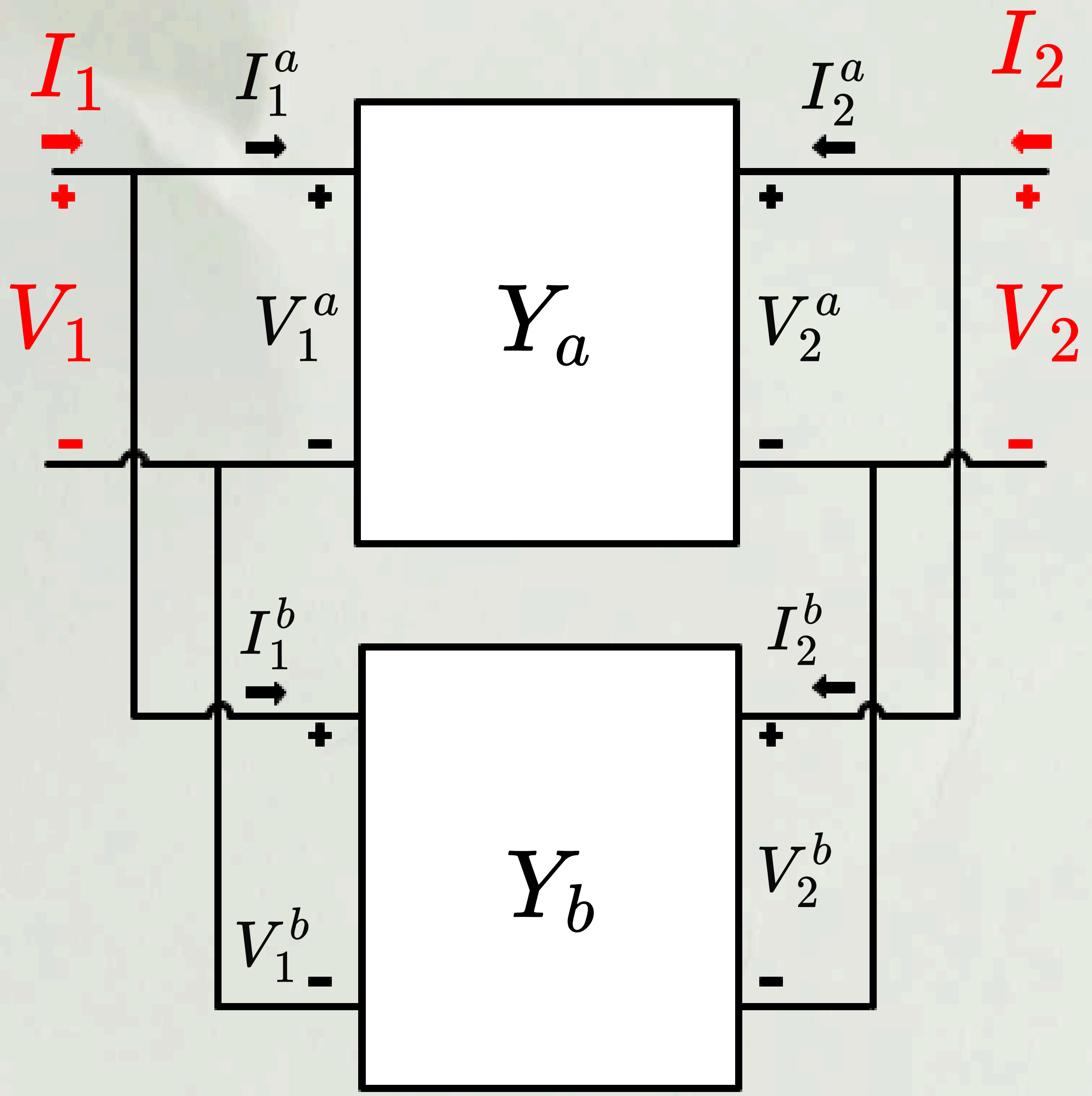
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = Z_a \begin{bmatrix} I_1^a \\ I_2^a \end{bmatrix} + Z_b \begin{bmatrix} I_1^b \\ I_2^b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = Z_a \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + Z_b \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = (Z_a + Z_b) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Cuadripolos

PARALELO-PARALELO



$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^a + I_1^b \\ I_2 &= I_2^a + I_2^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^a = V_1^b \\ V_2 &= V_2^b = V_2^a \end{aligned}$$

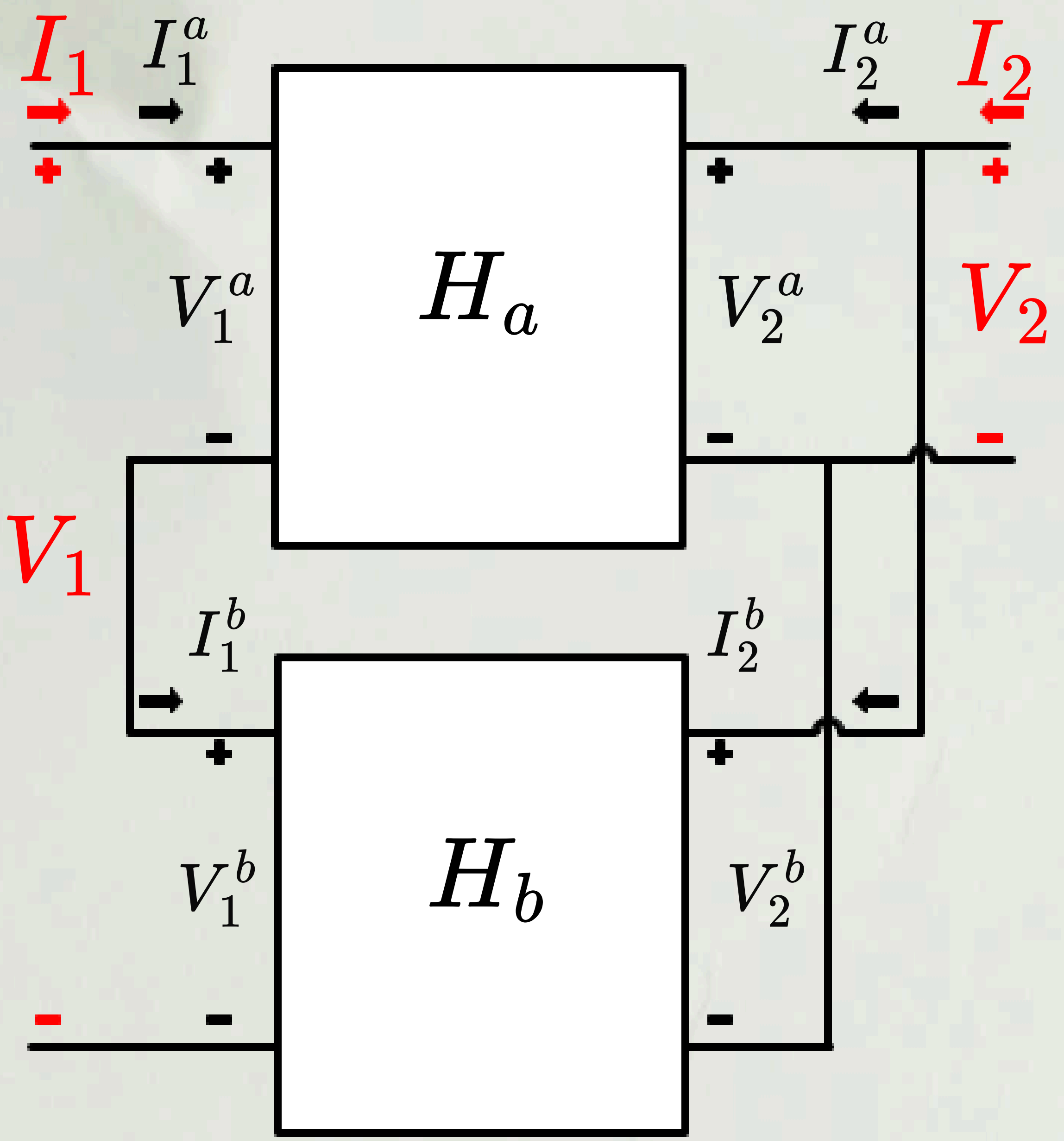
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y_a \begin{bmatrix} V_1^a \\ V_2^a \end{bmatrix} + Y_b \begin{bmatrix} V_1^b \\ V_2^b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Y_a \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + Y_b \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = (Y_a + Y_b) \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Cuadripolos

SERIE-PARALELO



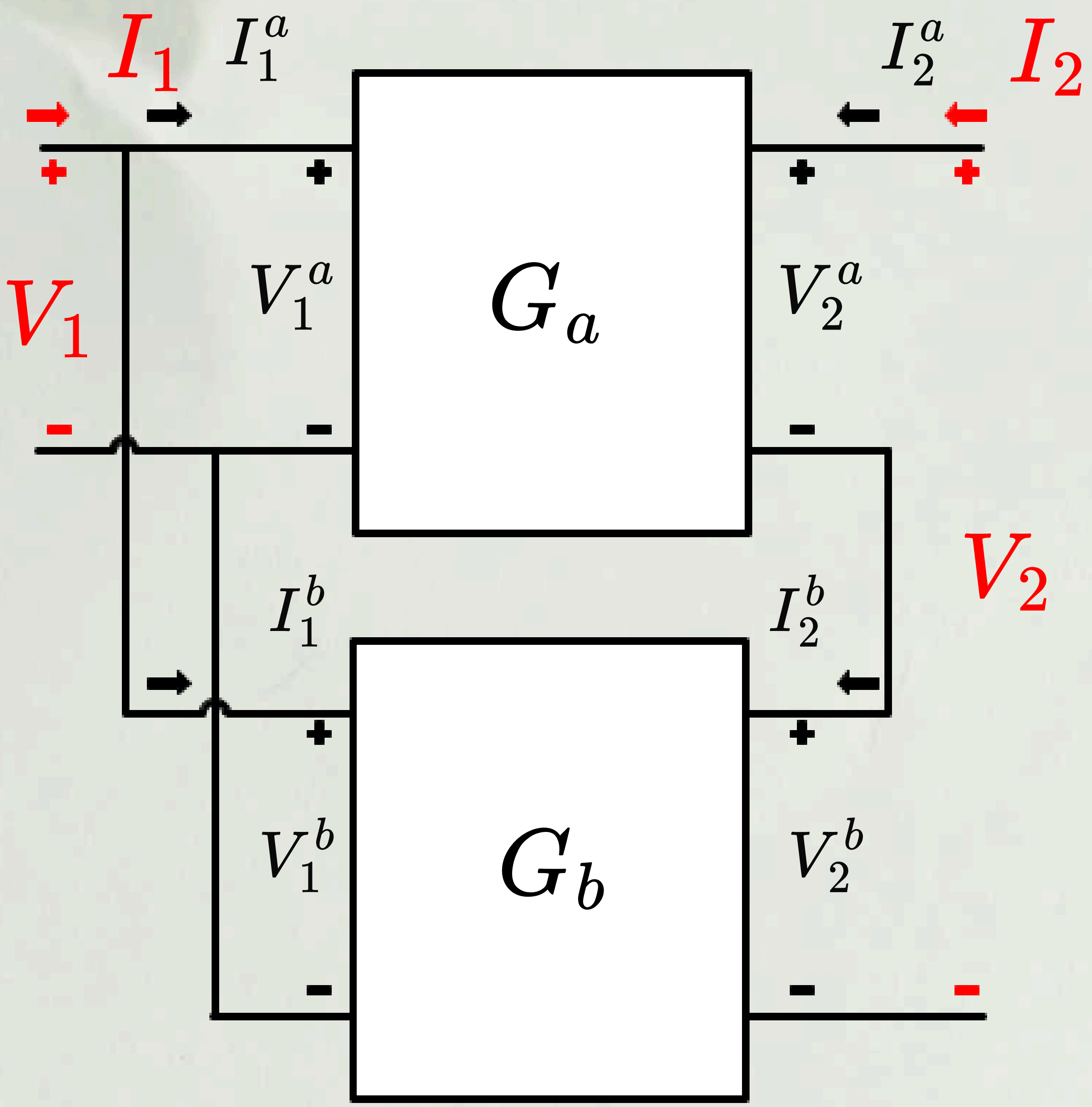
$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^a = I_1^b \\ I_2 &= I_2^a + I_2^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^a + V_1^b \\ V_2 &= V_2^b = V_2^a \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H_a \begin{bmatrix} I_1^a \\ V_2^a \end{bmatrix} + H_b \begin{bmatrix} I_1^b \\ V_2^b \end{bmatrix}$$

Cuadripolos

PARALELO-SERIE



$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_1^a + I_1^b \\
I_2 &= I_2^a = I_2^b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = G_a \begin{bmatrix} V_1^a \\ I_2^a \end{bmatrix} + G_b \begin{bmatrix} V_1^b \\ I_2^b \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
V_1 &= V_1^a = V_1^b \\
V_2 &= V_2^b + V_2^a
\end{aligned}
$$