

Facultad de Ingeniería – Udelar

Departamento de Diseño industrial – IIMPI

**MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL
MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS**

CLASE N° 7

**ELEMENTOS 2D EN ESTADO PLANO. FORMULACIÓN DE
ELEMENTOS TRIANGULARES.**

PROFESOR

Dr. Henry Figueredo Losada

Montevideo. Uruguay.

Noviembre 2019

TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.

CLASE 7. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS TRIANGULARES.

Sumario.

- 1. Introducción.**
- 2. Conceptos básicos de la teoría de elasticidad.**
- 3. Formulación de la función de forma para un elemento 2D de tipo triangular.**
- 4. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma.**

Objetivos.

Conocer los conceptos más importantes para definir la matriz de rigidez de elementos finitos en estado plano de tensiones o deformaciones 2D.

Bibliografía.

9. Klaus-Jurgen Bathe "Finite Element Procedures", 2da Edição.
10. G.R.Liu "The Finite element Method- A practical course".
11. The Finite Element Method using MATLAB - Kwon and Bang
12. George E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics McGraw-Hill.
13. Chaves, E, W.V. & Mínguez, R. (2009). "Mecánica Computacional en la Ingeniería con aplicaciones en MATLAB. Editorial UCLM.

Bibliografía opcional portugués

12. Avelino Alves Filho "Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE", 5ta Edição.

1. Introducción.

En continuación con las aulas anteriores vamos a introducir otro tipo de elemento finito como parte de la biblioteca de elementos que estamos construyendo en este curso, o sea ya tenemos definidos los elementos de tipos resortes (spring), barra (truss) y vigas (Beam), y en esta clase vamos a formular nuestro primero elemento de tipo 2D en estado plano de deformaciones o tensiones.

El sistema de ecuaciones para un elemento 2D será más complejo en comparación con los elementos anteriores 1D. El procedimiento para desarrollar las ecuaciones será similar a la de los elementos de tipo viga unidimensional detallados anteriormente. En los desarrollos de los elementos siguientes será establecer principalmente los siguientes tres pasos de procedimientos como:

1. Construcción de las *funciones de forma* matriz N que satisfaga las 3 propiedades Ec. (5.8) -(5.9).
2. Formulación de la *Matriz Desplazamiento-Deformación* B .
3. Cálculo de $\{k^e\}$, $\{\sigma^e\}$, $\{\epsilon^e\}$

2. Conceptos básicos de la teoría de elasticidad.

Elasticidad 2D. Estado plano de tensiones y estado plano de deformaciones.

Muchos de los problemas en elasticidad pueden ser tratados satisfactoriamente por 2D (2 dimensiones) o “teoría de elasticidad plana” estos estados elásticos generales de tensión-deformación son reducibles a problemas “planos” o bidimensionales. Estos presentan 2 casos generales de tipos de problemas en este análisis plano.

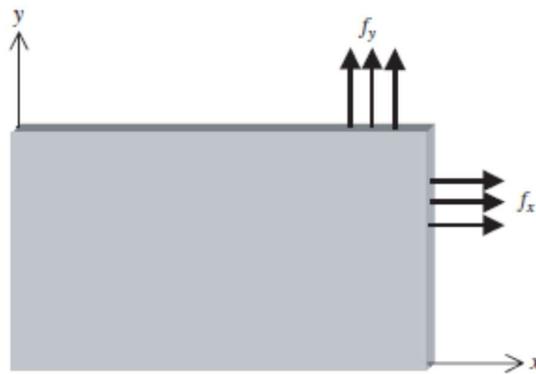


Figura 7.1 Chapa sobre estado plano de tensiones. [10]

La fig 7.1 representa un estado plano de tensiones, la geometría del cuerpo es esencialmente con 1 dimensión mucho menor que las otras. La carga es aplicada uniformemente sobre todo el espesor. El estado plano de tensión puede ser definido como un estado de tensiones en el cual la tensión normal y las tensiones de cortante al plano de mayor área son cero.

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (7.1)$$

$$(7.2)$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

$$\epsilon_z \neq 0 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.3)$$

Generalmente, aquellos elementos finos, cuyas dimensiones en el eje perpendicular al plano de mayor área son menores que las dos restantes y que están sometidos a cargas en las superficies de fronteras del plano de mayor área son estados planos de tensiones.

El estado plano de deformación es aquel estado en el cual la deformación normal y las deformaciones cortantes al plano de mayor área son cero.

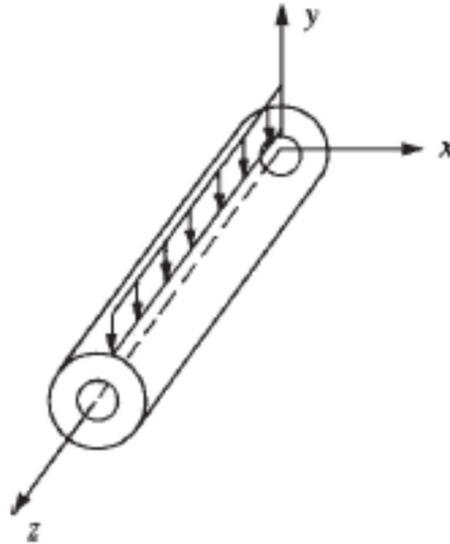


Figura 7.2 Estado plano de deformación.

Los estados planos de deformación son características de cuerpos con gran longitud en el eje perpendicular al plano x-y, fig 7.2.

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (7.4)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (7.5)$$

$$\sigma_z \neq 0 \quad (7.6)$$

Estado bidimensional de tensiones y deformaciones.

Es concepto de estado plano de tensión, deformación y la relación tensión-deformación en los estados planos son necesarios para el entendimiento del desarrollo y aplicabilidad de la matriz de rigidez de los elementos 2D.

En la fig 7.3 representamos el estado de tensiones para el elemento infinitesimal (fig 7.1) con lados dx y dy tiene tensiones normales σ_x y σ_y actuando en las direcciones x y y respectivamente. La tensión cortante τ_{yx} actúa sobre el eje y en la dirección de x (cara vertical), dado el equilibrio de momentos del elemento resulta que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Entonces tendremos tres componentes de tensión independientes las cuales representamos mediante la notación de Voigt como:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Las tensiones dadas en la Ec. (7.7) serán expresadas en términos de grados de libertad de desplazamientos nodales. Una vez los desplazamientos nodales sean determinados, estas tensiones pueden evaluarse directamente.

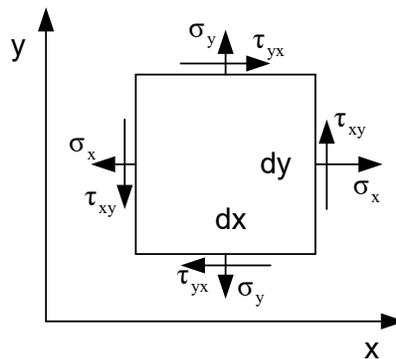


Figura 7.3 Estado bidimensional de tensiones.

Las tensiones principales, las cuales son tensiones normales máximas y mínimas en un plano 2D pueden obtenerse como:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{max}, \sigma_{min} \quad (7.8)$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (7.9)$$

La fig 7.4 a) muestra un elemento infinitesimal usado para representar el estado general de deformación bidimensionales en algún punto de la estructura. El elemento muestra un cambio de lugar en las magnitudes u y v en las direcciones x y y . Las deformaciones normales se pueden justificar por la acción de las tensiones normales, las tensiones cortantes o de cizallamientos producen distorsiones, fig 7.4 b).

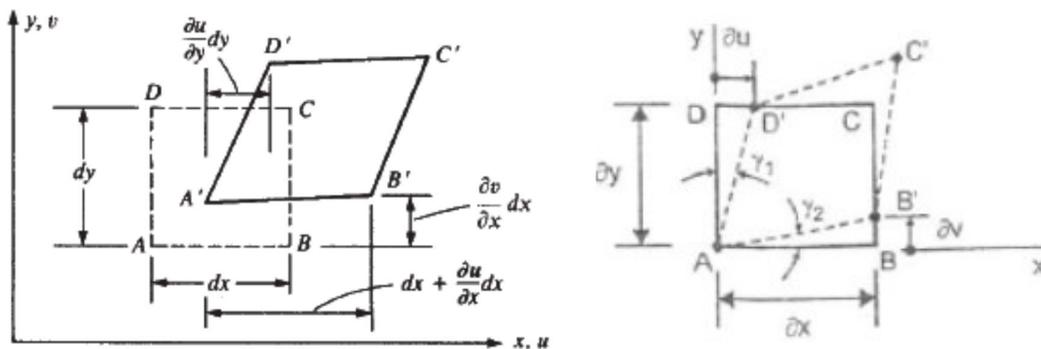


Figura 7.4 Desplazamientos y rotaciones de las líneas de un elemento infinitesimal en el plano x-y.

Consideremos la línea \overline{AB} en la dirección x estado no deformado, después de una deformación se ha convertido en $A'B'$, siendo u y v los desplazamientos en las direcciones x y y respectivamente. Asumiendo como u y v funciones continuas y de pequeñas magnitudes comparadas con las dimensiones del cuerpo. Utilizando la definición de *Deformación normal de Ingeniería* (ϵ) como:

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - \overline{AB}}{AB} \quad (7.10)$$

Considerando $AB=dx$ entonces:

$$A'B'^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 \quad (7.11)$$

Para pequeños gradientes de desplazamientos podemos despreciar $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ la longitud de $A'B'$ puede ser expresado como:

$$A'B' \approx dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (7.12)$$

Resolviendo la Ec. (7.10) la deformación normal en la dirección x del elemento rectangular es definida como:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.13)$$

Similarmente, la deformación normal en las direcciones y y z

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (7.14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7.15)$$

Retomando la fig 7.4 b) sobre la acción de tensiones cortante solamente, para pequeñas deformaciones el desplazamiento de los puntos de la línea AD es paralelo al eje x , considerando pequeñas gradientes de rotación γ_1 y $\gamma_2 \ll 1$ ($\tan \gamma_1 \approx \gamma_1$; $\tan \gamma_2 \approx \gamma_2$) estas

condiciones los ángulos son muy pequeños y la distorsión angular en el eje y está dada por ($\tan \gamma_1 \approx \gamma_1$ rad):

$$\gamma_1 = \frac{DD'}{DA} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.16)$$

Similarmente, la distorsión para el eje x como:

$$\gamma_2 = \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.17)$$

La distorsión en el plano xy :

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \therefore \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad (7.18)$$

Similarmente, para planos yz y xz tenemos

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (7.19)$$

Representando la deformación independiente las cuales representamos mediante la notación de Voigt como:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

La relación entre las tensiones - deformación para un material isotrópico en condiciones de estado plano de tensión, relación $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$ en la notación de Voigt:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \\ \rightarrow 0 \end{matrix}$

Removiendo las columnas y filas asociadas con las tensiones consideradas cero, la relación $\varepsilon(\sigma)$ es dada como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Donde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

La función recíproca resultado de la *Ley de Hooke* $\sigma(\varepsilon)$ para el estado plano de tensión como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \therefore \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}_{(2D-1)}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (7.23)$$

Nota: La tensión normal ε_z no es igual a cero, ya que ε_z no solo depende de la tensión normal σ_z :

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{-\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{(1-\nu)} \quad (7.24)$$

Nota: Tenga en cuenta que el estado plano de tensiones es siempre una aproximación que cuando se trata de un régimen de pequeñas deformaciones y el espesor (t) es muy pequeño en comparación con las otras dimensiones (L, H), el error cometido al utilizar el estado plano de tensión es pequeño.

La relación entre las tensiones - deformación para un material isotrópico en condiciones de estado plano de deformación, relación $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ en la notación de Voigt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Removiendo las columnas y filas asociadas con las deformaciones consideradas cero, la relación $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ es dada como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \therefore \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}_{(2D-2)}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (7.25)$$

La tensión normal en la dirección z es dada σ_z como:

$$\sigma_z = \frac{E\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (7.26)$$

Similarmemente, la relación inversa de $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$ como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Podemos incorporar los valores \bar{E} y $\bar{\nu}$ para la relación $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ en los estados plano de tensión y deformación como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{\bar{E}}{(1-\bar{\nu}^2)} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\bar{\nu}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} E.Plano \\ \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Tensión \\ Deformación \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \bar{E} = E \\ \bar{\nu} = \nu \\ \bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ \bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu} \end{array} \right. \quad (7.28)$$

3. Formulación de la función de forma para un elemento 2D de tipo triangular.

Para iniciar los pasos e introducir las ecuaciones básicas necesarias para el elemento plano triangular consideremos una placa fina sujeta a una carga de tracción superficial t_s , Como la mostrada en la fig 6.5, la cual ha sido discretizada con elementos triangulares.

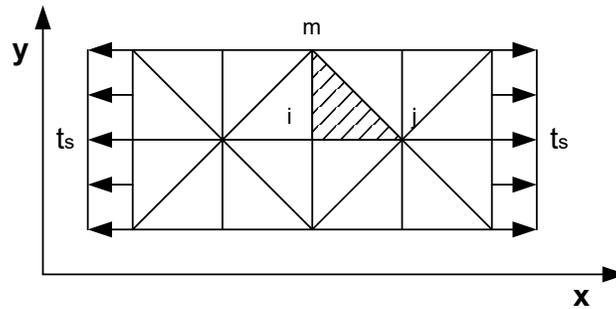


Figura 7.5 Placa fina discretizada

La placa se ha dividido en elementos triangulares planos, estos elementos tienen 3 nodos (1,2,3) y dos grados de libertad en cada nodo (u,v) asociados a las direcciones x y y , fig 7.6

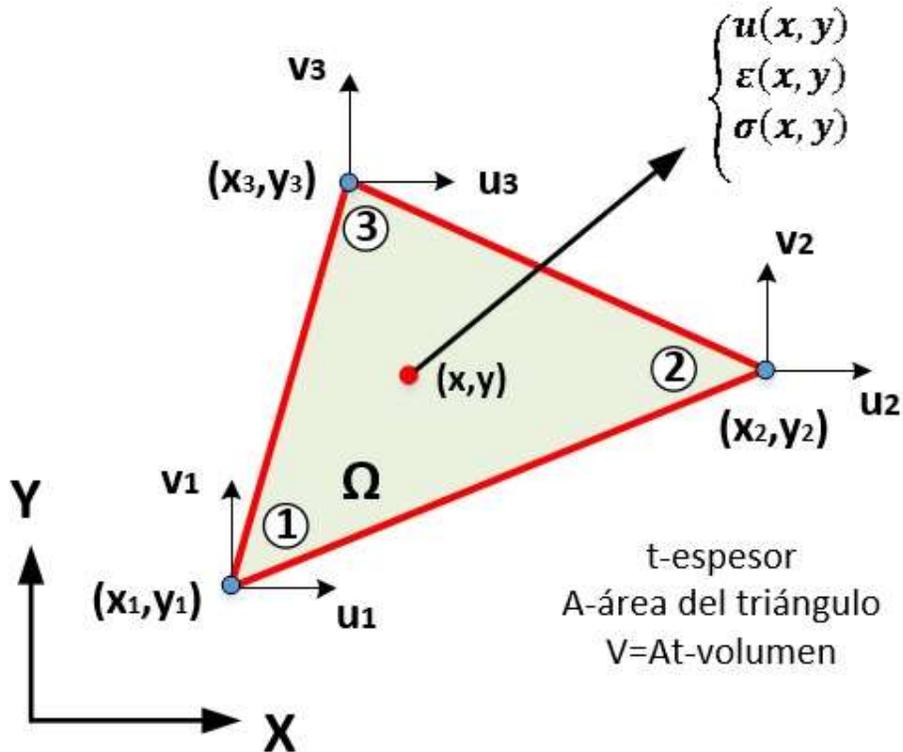


Figura 7.6 Dominio del elemento triangular plano.

Selección de las funciones de desplazamientos.

Al igual que vimos en clases anteriores tenemos que establecer una relación entre los desplazamientos dentro del elemento con los desplazamientos nodales, sabemos que el grado del polinomio de interpolación es definido a partir del conocimiento del número de grados de libertad del elemento (**DOF=6**). Siendo definido por las componentes u y v en las direcciones x y y respectivamente. La función de desplazamiento del elemento será una función lineal:

$$\{\mathbf{u}(x, y)\} = \begin{cases} u(x, y) = C_0 + C_1x + C_2y \\ v(x, y) = C_3 + C_4x + C_5y \end{cases} \quad (7.29)$$

Para propósitos de una representación computacional, vamos a representar la Ec (6.29) en forma matricial.

$$\{\mathbf{u}(x, y)\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{Bmatrix} = \mathbf{p}(x, y)\mathbf{C} \quad (7.30)$$

Para determinar los coeficientes C de la Ec. (7.30) vamos a sustituir las coordenadas de los puntos nodales en la Ec. (7.29) como:

$$\begin{cases} u(x_1, y_1) \equiv u_1 = C_0 + C_1x_1 + C_2y_1 \\ v(x_1, y_1) \equiv v_1 = C_3 + C_4x_1 + C_5y_1 \\ \dots\dots\dots \\ u(x_2, y_2) \equiv u_2 = C_0 + C_1x_2 + C_2y_2 \\ v(x_2, y_2) \equiv v_2 = C_3 + C_4x_2 + C_5y_2 \\ \dots\dots\dots \\ u(x_3, y_3) \equiv u_3 = C_0 + C_1x_3 + C_2y_3 \\ v(x_3, y_3) \equiv v_3 = C_3 + C_4x_3 + C_5y_3 \end{cases} \quad (7.31)$$

En la representación de forma matricial

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

En forma reescribiendo a Ec. (7.32) en forma compacta como:

$$\{u_e\}_{6 \times 1} = [A]_{6 \times 6} \{C\}_{6 \times 1} \quad (7.33)$$

Calculando los coeficientes de C , utilizando la inversa de $[A]$

$$[A]^{-1} \{u_e\} = [A]^{-1} [A] \{C\} \rightarrow [A]^{-1} \{u_e\} = [1] \{C\} \therefore \{C\} = [A]^{-1} \{u_e\} \quad (7.34)$$

Sustituyendo en la Ec. (7.30) en la Ec. (7.34)

$$\{u(x, y)\} = p(x, y) [A]^{-1} \{u_e\} = [N] \{u_e\} \quad (7.35)$$

Donde la *función de forma* $[N]$, para el campo de desplazamiento está dada como:

$$[N]_{2 \times 6} = p(x, y)_{2 \times 6} [A]^{-1}_{6 \times 6} \quad (7.36)$$

La matriz $[A]^{-1}_{6 \times 6}$ es dada como:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} x_2y_3 - y_2x_3 & 0 & x_3y_1 - y_3x_1 & 0 & x_1y_2 - y_1x_2 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - y_2x_3 & 0 & x_3y_1 - y_3x_1 & 0 & x_1y_2 - y_1x_2 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

Donde

A^e : es el área del elemento triángulo.

El área de un triángulo conocida las coordenadas (x,y) de sus vértices puede ser determinada a través del determinante como:

$$A = \frac{1}{2} \text{Det } |\mathbf{D}| \rightarrow [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

$[\mathbf{D}]$: parámetro determinado por matriz de las coordenadas de los vértices del triángulo.

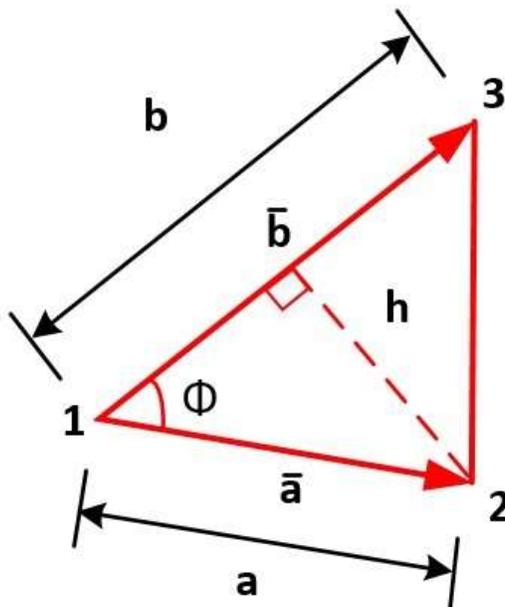


Figura 7.7 Diagrama para el cálculo del área de un triángulo

La relación entre el área (A) y el determinante $[A]$ puede ser relacionada:

$$2A^e = \det([A]) = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \quad (7.39)$$

Nota: Demostración el área de un triángulo es dada por el producto de la base por la altura:

$$A^e = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b \cdot a \cdot \text{sen}(\theta) \quad (7.40)$$

Utilizando el triple producto escalar de 2 vectores es dada por la expresión:

$$\vec{k} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{1}{2}b \cdot a \cdot \text{sen}(\theta) \quad (7.41)$$

Utilizando la Ec. (7.40)–(7.41):

$$A^e = \frac{1}{2}\vec{k} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{k} \cdot \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (7.42)$$

Donde

$$\vec{a} : (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j},$$

$$\vec{b} : (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j},$$

Nota: Desarrollo del producto vectorial está basado en la regla de la mano derecha para la definición del ángulo θ , esta sería una de las razones para numerar los nodos en sentido antihorario, es fácil verificar si los nodos son numerados en sentido horario se obtén un área negativa (las dos filas del determinante deben ser intercambiadas, se modifica el signo).

Calculando la Ec. (7.36)

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & : N_2(x, y) & 0 & : N_3(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & : 0 & N_2(x, y) & : 0 & N_3(x, y) \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

Las funciones $N_i(x, y)$ dada:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2A} [x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + (x_2y_3 - x_3y_2)] \quad (7.44)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{2A} [x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1)] \quad (7.45)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{2A} [x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - y_1y_2)] \quad (7.46)$$

En el aula anterior fue obtenida la ecuación para la matriz de rigidez de un elemento genérico como:

$$\{k^e\} = \int_{vol} [B(x)]^T \cdot [D] \cdot [B(x)] dVol \quad (7.47)$$

Recordando que $[B(x)]$ es la matriz que permite relacionar los campos de desplazamientos nodales con los campos de deformaciones dentro del elemento y es llamado de *Matriz Desplazamiento-Deformación*.

Retomando la breve revisión sobre algunos de los **Conceptos básicos de la teoría de elasticidad**.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.48)$$

Para propósitos de una representación computacional, vamos a representar la Ec. (7.48) en forma matricial y sustituir Ec. (7.35):

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & : N_2(x,y) & 0 & : N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & : 0 & N_2(x,y) & : 0 & N_3(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_2 \\ v_2 \\ \dots \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (7.49)
 \end{aligned}$$

En la Ec.(7.49) denotamos por $[L]$ la matriz que contiene las derivadas parciales, reescribiendo para $[B(x)]$.

$$\therefore [L][N] = [B(x)] \quad (7.50)$$

De las expresiones anteriores definimos la relación entre la deformación dentro del elemento como:

$$\{\varepsilon(x)\} = [L]\{u(x)\} = [L][N]\{u_e\} = [B(x)]\{u_e\} \quad (7.51)$$

Sustituyendo en la Ec. (7.50) las funciones $N_i(x, y)$ dadas:

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{B}(x)] \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & : & N_2(x,y) & 0 & : & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & : & 0 & N_2(x,y) & : & 0 & N_4(x,y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & : & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & : & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & : & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & : & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & : & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & : & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{7.52}
\end{aligned}$$

Donde

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} [x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)] = \frac{1}{2A} (y_2 - y_3) \tag{7.53}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial y} [x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)] = \frac{1}{2A} (x_3 - x_2) \tag{7.54}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} [x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + (x_3 y_1 - y_3 x_1)] = \frac{1}{2A} (y_3 - y_1) \tag{7.55}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial y} [x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + (x_3 y_1 - y_3 x_1)] = \frac{1}{2A} (x_1 - x_3) \tag{7.56}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} [x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - y_1 y_2)] = \frac{1}{2A} (y_1 - y_2) \tag{7.57}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial y} [x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - y_1 y_2)] = \frac{1}{2A} (x_2 - x_1) \tag{7.58}$$

Sustituyendo en la Ec. (7.52):

$$[\mathbf{B}(x)] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & \vdots & y_3 - y_1 & 0 & \vdots & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & \vdots & 0 & x_1 - x_3 & \vdots & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & \vdots & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & \vdots & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

En la Ec. (7.59) denotamos por $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$, reescribiendo para $[\mathbf{B}(x)]$.

$$[\mathbf{B}(x)] = [[\mathbf{B}_1]_{3 \times 2} \quad [\mathbf{B}_2]_{3 \times 2} \quad [\mathbf{B}_3]_{3 \times 2}] \quad (7.60)$$

*Nota: Siempre que el campo de desplazamientos sea lineal, la matriz $\mathbf{B}(x)$ es constante dentro del subdominio y como consecuencia el campo de deformación y tensión también dentro del subdominio. Por esta razón el subdominio del triángulo es llamado “**constant strain triangle**”- CST.*

Utilizando la Ec. (7.48) para las derivaciones de las funciones de interpolación de desplazamientos seleccionadas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = C_1 \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = C_5 \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_2 + C_4 \quad (7.61)$$

La Ec. (7.61) nos muestra una conclusión importante del elemento en estudio, las deformaciones calculadas se aplican a todos los puntos del elemento y son constantes a causa de la selección de las funciones de desplazamientos de *primer grado* para representar los desplazamientos, esta es una serie limitación del elemento triangular.

Sustituyendo la Ec. (7.47) para la matriz de rigidez como:

$$[\mathbf{k}^e]_{6 \times 6} = [\mathbf{B}(x)]^T [\mathbf{C}_{(2D)}] [\mathbf{B}(x)] \int_{V=A \cdot t} dV \quad (7.62)$$

Calculando la Ec. (7.61) con área (A), espesor (t) y volumen (v=At).

$$[\mathbf{k}^e]_{6 \times 6} = [\mathbf{B}(x)]_{6 \times 3}^T [\mathbf{C}_{(2D)}]_{3 \times 3} [\mathbf{B}(x)]_{3 \times 6} A \cdot t \quad (7.63)$$

Nota: Pudimos obtener de forma explícita la matriz de rigidez por medio de la multiplicación de matriz Ec. (7.63), pero en algunos casos la forma explícita de la matriz $[\mathbf{k}^e]$ **no es tan fácil para obtener**, entonces tenemos que resolver con la integración numérica (también llamada de “cuadrature”) para resolver la Ec. (7.47).

Sustituyendo en la Ec. (7.28) con la Ec. (7.51) para el cálculo de las tensiones en función de los desplazamientos nodales:

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = [\mathbf{C}_{(2D)}] \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = [\mathbf{C}_{(2D)}] [\mathbf{B}(x)] \{u_e\} \quad (7.64)$$

Para propósitos de una representación computacional, vamos a representar la Ec. (7.63) en forma compacta:

$$[k^e]_{6 \times 6} = At \left[[\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{C}_{(2D)}] [\mathbf{B}_j] \right] \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (7.65)$$

Considerando

$$[\mathbf{C}_{(2D)}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

Podemos reescribir como:

$$[\mathbf{B}_i]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}_j] = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} \alpha_i & 0 & \beta_i \\ 0 & \beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} = \frac{1}{4A^2} [\mathbf{k}_{ij}] \quad (7.67)$$

Donde

$$[\mathbf{k}_{ij}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \alpha_i C_{11} \alpha_j + \beta_i C_{33} \beta_j & \alpha_i C_{12} \beta_j + \beta_i C_{33} \alpha_j \\ \beta_i C_{12} \alpha_j + \alpha_i C_{33} \beta_j & \beta_i C_{22} \beta_j + \alpha_i C_{33} \alpha_j \end{bmatrix} \quad (7.68)$$

La matriz de rigidez $[\mathbf{k}^e]$:

$$[\mathbf{k}^e]_{6 \times 6} = \frac{t}{4A} \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{11}] & [\mathbf{k}_{12}] & [\mathbf{k}_{13}] \\ [\mathbf{k}_{21}] & [\mathbf{k}_{22}] & [\mathbf{k}_{23}] \\ [\mathbf{k}_{31}] & [\mathbf{k}_{32}] & [\mathbf{k}_{33}] \end{bmatrix} = \frac{t}{4A} \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e & k_{15}^e & k_{16}^e \\ & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e & k_{25}^e & k_{26}^e \\ & & k_{33}^e & k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e \\ & Sim & & k_{44}^e & k_{41}^e & k_{42}^e \\ & & & & k_{55}^e & k_{51}^e \\ & & & & & k_{66}^e \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

Sendo

$$\begin{aligned} k_{11}^e &= \alpha_1^2 C_{11} + \beta_1^2 C_{33}; & k_{12}^e &= \alpha_1 C_{12} \beta_1 + \beta_1 C_{33} \alpha_1; & k_{13}^e &= \alpha_1 C_{11} \alpha_2 + \beta_1 C_{33} \beta_2; \\ k_{14}^e &= \alpha_1 C_{12} \beta_2 + \beta_1 C_{33} \alpha_2; & k_{15}^e &= \alpha_1 C_{11} \alpha_3 + \beta_1 C_{33} \beta_3; & k_{16}^e &= \alpha_1 C_{12} \beta_3 + \beta_1 C_{33} \alpha_3; \\ k_{22}^e &= \beta_1^2 C_{22} + \alpha_1^2 C_{33}; & k_{23}^e &= \beta_1 C_{12} \alpha_2 + \alpha_1 C_{33} \beta_2; & k_{24}^e &= \beta_1 C_{22} \beta_2 + \alpha_1 C_{33} \alpha_2; \\ k_{25}^e &= \beta_1 C_{12} \alpha_3 + \alpha_1 C_{33} \beta_3; & k_{26}^e &= \beta_1 C_{22} \beta_3 + \alpha_1 C_{33} \alpha_3; & k_{33}^e &= \alpha_2^2 C_{11} + \beta_2^2 C_{33}; \\ k_{34}^e &= \alpha_2 C_{12} \beta_2 + \beta_2 C_{33} \alpha_2; & k_{35}^e &= \alpha_2 C_{11} \alpha_3 + \beta_2 C_{33} \beta_3; & k_{36}^e &= \alpha_2 C_{12} \beta_3 + \beta_2 C_{33} \alpha_3; \\ k_{44}^e &= \beta_2^2 C_{22} + \alpha_2^2 C_{33}; & k_{45}^e &= \beta_2 C_{12} \alpha_3 + \alpha_2 C_{33} \beta_3; & k_{46}^e &= \beta_2 C_{22} \beta_3 + \alpha_2 C_{33} \alpha_3; \\ k_{55}^e &= \alpha_3^2 C_{11} + \beta_3^2 C_{33}; & k_{56}^e &= \alpha_3 C_{12} \beta_3 + \beta_3 C_{33} \alpha_3; & k_{66}^e &= \beta_3^2 C_{22} + \alpha_3^2 C_{33}; \end{aligned} \quad (7.70)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= y_2 - y_3 & \alpha_2 &= y_3 - y_1 & \alpha_3 &= y_1 - y_2 \\ \beta_1 &= x_3 - x_2 & \beta_2 &= x_1 - x_3 & \beta_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (7.71)$$

La función de forma para el elemento triangular (CST), fig 7.8.

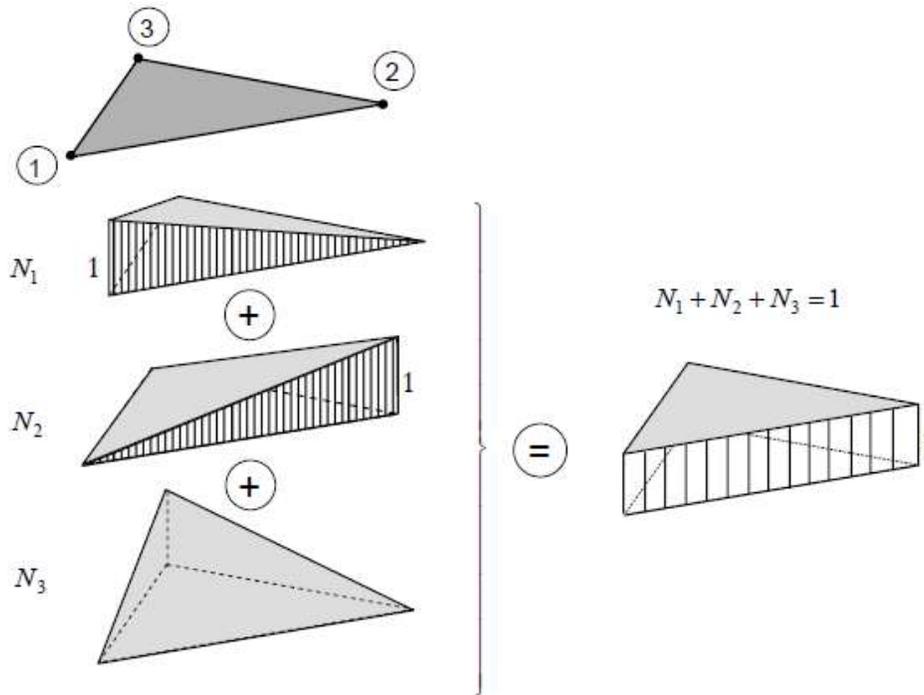


Figura 7.8 Funciones de forma para un elemento triángulo. [13]

Obtención de las funciones de forma utilizando otra vía.

A continuación, consideremos la función de desplazamiento en x como:

$$u(x, y) = C_0 + C_1x + C_2y \tag{7.72}$$

Sustituyendo los valores nodales en la Ec. (7.72):

$$\begin{aligned} u_1 &= C_0 + C_1x_1 + C_2y_1 \\ u_2 &= C_0 + C_1x_2 + C_2y_2 \\ u_3 &= C_0 + C_1x_3 + C_2y_3 \end{aligned} \tag{7.73}$$

Para propósitos de una representación computacional, vamos a representar la Ec (6.73) en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (7.74)$$

Para determinar el valor de los coeficientes de C_i usamos la Regla de Cramer como:

$$C_0 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} ; \quad C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} ; \quad C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad (7.75)$$

Donde $|*| \equiv \det(*)$, y Ec. (7.76)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \equiv \det \left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \right) = 2A \quad (7.76)$$

Vamos a representar la Ec. (7.75) como:

$$\begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \quad (7.77)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix} = -u_1 \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} - u_3 \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} \quad (7.78)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \quad (7.79)$$

Sustituyendo en la Ec. (7.72) las Ec. (7.77-7.79):

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} u(x, y) \\
&= u_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\
&+ x \left(-u_1 \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} - u_3 \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \\
&+ y \left(u_1 \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{7.80}$$

Reagrupando la Ec. (7.80) note que:

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} u(x, y) \\
&= u_1 \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \right) \\
&+ u_2 \left(- \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \right) \\
&+ u_3 \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{7.81}$$

Vamos a representar la Ec (6.81) convenientemente para u_i propósitos computacionales como:

$$u_1 \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \right) = u_1 \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{7.82}$$

$$u_2 \left(- \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \right) = u_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{7.83}$$

$$u_3 \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \right) = u_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \quad (7.84)$$

El desplazamiento de la Ec. (7.81) puede ser expresado como:

$$u(x, y) = u_1 \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} + u_2 \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} + u_3 \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad (7.85)$$

Definimos las funciones de formas Ec. (7.85) como:

$$N_1(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}; \quad N_2(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}; \quad N_3(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad (7.86)$$

Para establecer la matriz $[\mathbf{B}(x)]$ que contiene las derivadas parciales Ec. (7.50):

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{y_2 - y_3}{2A} \quad (7.87)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{x_3 - x_2}{2A} \quad (7.88)$$

Normalización del espacio de Funciones de forma de elementos triangulares

Es de gran interés práctico que en el intervalo en el que se aproximen las funciones de forma este normalizado, el elemento triangular de la fig 7.9.

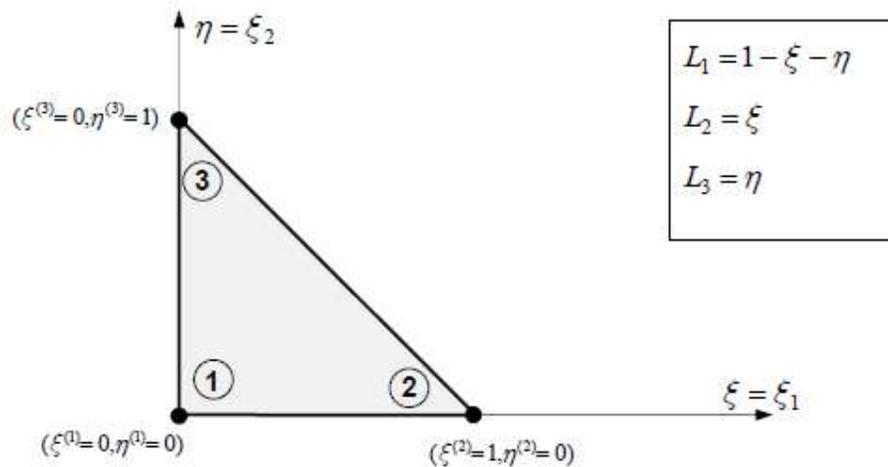


Figura 7.9 Elemento triangular de 3 nodos – Espacio normalizado [13].

Utilizando la definición de la Ec. (7.86) definimos las funciones de formas como:

Para propósitos de representación tal que $L_1 = 1 - \xi - \eta$; $L_2 = \xi$; $L_3 = \eta$ que son conocidos como *Coordenadas de Área*.

Otro método alternativo y eficaz para crear funciones de forma para elementos triangulares es utilizar las llamadas *Coordenadas de Área* L_1 , L_2 y L_3 . El uso de las coordenadas de áreas conduce inmediatamente a las funciones de forma para elementos triangulares.

Es conveniente expresar la posición de un punto arbitrario $P(x,y)$ en función de las coordenadas de área (L_1 , L_2 y L_3), que constituyen el nuevo sistema de referencia.

Considerando el punto $P(x,y)$ dentro del triángulo fig 7.10 , formando un sub-triángulo 2-3-P. El área de este sub-triángulo es denotado como A_1 , y puede se calculado usando la fórmula:

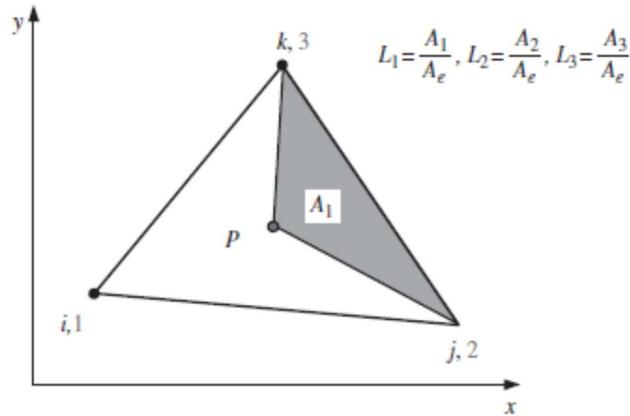


Figura 7.10 Definición de las Coordenadas de áreas. [10]

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (7.89)$$

La coordenada L_1 es entonces definida como:

$$L_1 = \frac{A_1}{A_e} \quad (7.90)$$

Análogamente, se cumple para L_2 y L_3 por lo quedan definidas las *Coordenadas de Área*. Es muy fácil confirmar la propiedad unitaria de las coordenadas de área L_1, L_2 y L_3 .

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (7.91)$$

En segundo lugar, estas coordenadas de *Coordenadas de Área* tienen propiedades de la función delta. Por ejemplo, L_1 definitivamente será cero si $P(x,y)$ está en los nodos remotos 2 y 3 , y será la unidad si $P(x,y)$ está en el nodo 1.

Otro aspecto importante de emplear las funciones de forma en *Coordenadas de Área* es su sencillez de integración para el cálculo posterior de matrices de rigidez. Para ello podemos utilizar las siguientes expresiones correspondientes a la integración a lo largo de una línea, en un área o en un volumen, respectivamente.:

$$\int_S L_1^a L_2^b dS = \frac{a! b!}{(a + b + 1)!} S \quad (7.92)$$

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} 2A \quad (7.93)$$

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a! b! c! d!}{(a + b + c + d + 3)!} 3! V \quad (7.94)$$

Donde S es la longitud del elemento de integración, A es el área, V el volumen, $n!$ el factorial de n .

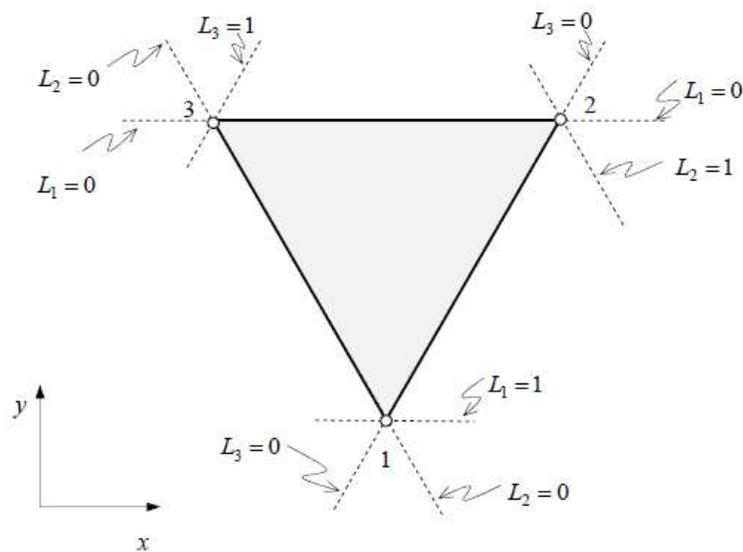


Figura 7. 11 Coordenadas de Área – Triangulo con 3 nodos.[13]

El elemento triangular más sencillo que se puede emplear es el de 3 nodos, fig 7.11. El nodo 1 únicamente depende de la *Coordenadas de Área* L_1 , ya que en este nodo $L_1 = L_2 = 0$. Para obtener su función de forma se emplea el polinomio de Lagrange con 2 puntos $n=2$, como:

$$N_1(L_1) = \frac{L_1 - L_1^{(2-3)}}{L_1^{(1)} - L_1^{(2-3)}} = \frac{L_1 - 0}{1 - 0} = L_1 \quad (7.95)$$

Donde $L_1^{(2-3)}$ es valor de la *Coordenadas de Área* L_1 en la arista que une los nodos 2 y 3.