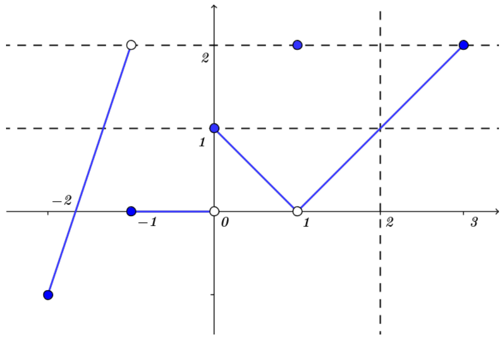
Práctico 8: Límites y Continuidad

Ejercicio 1 (Cálculo gráfico de límites) *Dada la gráfica:*



1. *Determinar:*

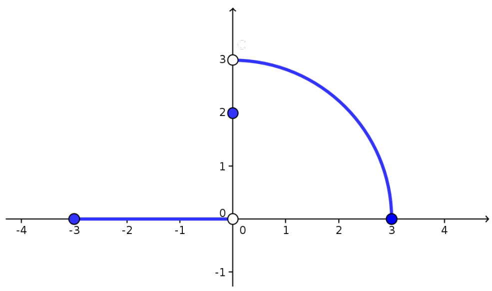
   a) $g(-2)$ b) $g(-1)$ c) $g(0)$ d) $g(1)$ e) $g(2)$ f) $g(3)$

2. *Determine los límites que se piden para la función $g(x)$ cuya gráfica se muestra a continuación o explique por qué no existen:*

   a) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

Ejercicio 2 (Cálculo gráfico de límites laterales) *A partir de la función cuya gráfica se muestra calcular:*

1. $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



Ejercicio 3 (Límites laterales) 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \neq 1, \\ 2 & si\ x = 1. \end{cases}$

Graficar f y hallar:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

¿Qué sucede con los límites anteriores si f no está definida en $x = 1$?

2. *Sea* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=\begin{cases}2x^2 & \text{si } x<1,\\ 4-x & \text{si } x\geq 1.\end{cases}$

   Graficar f *y hallar:*

   a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

3. *Sea* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=\begin{cases}2x+10 & \text{si } x\leq -2,\\ -4+x & \text{si } x> -2.\end{cases}$

   Graficar f *y hallar:*

   a) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

Ejercicio 4 (Operaciones con límites) *Calcular los siguientes límites, indicando las propiedades de las operaciones con límites utilizadas:*

1. $\lim\limits_{x\to 4} 5x^2-2x+3$
2. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x-2}{x^2+4x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-7}$

Ejercicio 5 (Operaciones con límites) *Asumiendo que existe, calcular para los siguientes ejemplos* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2f(x)}{5}=1, \quad a=3$
2. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{f(x)}{x^2}=1 \quad a=-2$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)^2-6f(x)+2=-7, \quad a=2$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}=0, \quad a=0$
5. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2}=3, \quad a=2$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2f(x)-x}}{f(x)}=1, \quad a=1$

Ejercicio 6 (Interpretación gráfica de límite)

1. *Dibujar el gráfico de una función* f *que satisfaga (todas) las siguientes condiciones:*
   - $f(0)=3$
   - $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=0$
   - $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$
2. *Dibujar el gráfico de una función* f *que satisfaga (todas) las siguientes condiciones:*
   - $f(n)=1\ \forall n\in\mathbb{N}$,
   - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$
   - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$
   - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$
   - $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$

Ejercicio 7 (Límites con cociente de polinomios)

1. *Determinar existencia y calcular los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to 1} x^4+x^3+x^2+x+1$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x+2}{x^2+4}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4-2x^3}{x^3-x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$

2. *Consideremos las funciones:*

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ $\qquad h(x) = \frac{x^8-1}{x^5-x}$

a) *Asumiendo que existen, calcular los límites:*

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

5) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

6) $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

7) $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$

8) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

9) $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

b) *Calcular los límites indicados y revisar los resultados en en la siguiente aplicación Geogebra.*

Ejercicio 8 (Límites con valor absoluto)
Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to -4} |x+4|$
2. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$
5. $\lim\limits_{x\to 3/2} \frac{2x^2-3x}{|2x-3|}$

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 9 (Límites con radicales) *Determinar existencia y calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x-1}+1$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$.
5. $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 10 (Límites con exponencial y logaritmo) *Determinar existencia y calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to -1} e^{x^3-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} e^{\operatorname{sen}(x-2)}$.
4. $\lim\limits_{x\to 1} \log(x^2)$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(\sqrt{x+3}) - \ln(\sqrt{x})$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \log(1+\operatorname{sen}(x-2))$.

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 11 (Límites con trigonométricas) *Determinar existencia y calcular los siguientes límites:*

1. $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}(x)$
2. $\lim_{x\to 1}(x^3-1)(1+\operatorname{sen}(2x))$
3. $\lim_{x\to 2}(x^4-2x^3)cos(x^2)$.
4. $\lim_{x\to 1}\log(x^2)\operatorname{sen}^2(x+1)$

Graficar con Geogebra y comparar los resultados.

Ejercicio 12 (Existencia y operaciones con límites) *Mostrar por medio de un ejemplo que:*

1. $\lim_{x\to a} f(x)+g(x)$ *puede existir aún cuando no exista* $\lim_{x\to a} f(x)$ *ni* $\lim_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ *puede existir aún cuando no exista* $\lim_{x\to a} f(x)$ *ni* $\lim_{x\to a} g(x)$

Ejercicio 13 (Infinitésimos equivalentes) 1. *Dadas dos funciones reales f y g, decimos que f y g son infinitésimos en $x=a$ si:*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Decimos además, que son ***infinitésimos equivalentes*** *si:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Con la ayuda de la siguiente aplicación Geogebra de análisis de límite puntual, determinar si las siguientes son infinitésimos equivalentes en $x=0$:

a) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ *y* $g(x)=x$
b) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ *y* $g(x)=x^2$
c) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ *y* $g(x)=1-\frac{x^2}{2}$
d) $f(x)=\cos(x)$ *y* $g(x)=x$
e) $f(x)=\cos(x)$ *y* $g(x)=1-\frac{x^2}{2}$
f) $f(x)=\ln(1+x)$ *y* $g(x)=x$
g) $f(x)=\ln(1+x)$ *y* $g(x)=\operatorname{sen}(x)$
h) $f(x)=e^x$ *y* $g(x)=1+x$

2. *A partir de lo anterior, calcular:*

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}$.
b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin(x)}$.
c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$.
d) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(sin(x))^4}{4}-(cos(x)-1)^2}{\ln(1+2x^4)}$.

Ejercicio 14 (Órdenes de infinito) *Supongamos f y g dos funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$$

Decimos que f ***es un infinito de orden superior a*** *g (y escribimos $g\prec f$) si*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$$

Con la siguiente aplicación Geogebra, ordenar las siguientes funciones según los órdenes de infinitos:

1. $f_1(x)=2^x$
2. $f_2(x)=\ln(3x)$
3. $f_3(x)=x^5$
4. $f_4(x)=4x^{15}$
5. $f_5(x)=xe^x$
6. $f_6(x)=\sqrt[3]{x}$

Ejercicio 15 (Cocientes de infinitos) *Calcular los siguientes límites.*

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+ln|x|}{7x^2+\sqrt{|x|}}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x-1}-x^3}{-x^2+ln(x+5)}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+1}{x^3+e^{-x}}$

Ejercicio 16 (Continuidad)
Para las siguientes funciones $f : D \to \mathbb{R}$ siendo D el máximo dominio de definición, indicar si f es continua en el punto x indicado.

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, *si* $x \neq 1$, *y* $f(1) = -2$ *en* $x = 1$.
2. $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ *en* $x = 3$.
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$ *en* $x = 1$ *si si* $x \neq 1$, *y* $f(1) = 0$ *en* $x = 1$.
4. $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$ *en* $x = 1$.
5. $f(x) = e^{x^3-1}$ *en* $x = 0$.
6. $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x-2)}$ *en* $x = 2$.
7. $f(x) = \ln(x^2)$ *en* $x = 1$.
8. $f(x) = \log(1 + \operatorname{sen}(x-2))$ *en* $x = 2$.
9. $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$ *en* $x = 0$.
10. $f(x) = \log(x^2)\operatorname{sen}^2(x+1)$ *en* $x = 1$.

Observar que las expresiones que definen a las funciones ya fueron analizadas en ejercicios anteriores.

Ejercicio 17 (Continuidad)
Determinar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la función f es continua:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & si\ x \leq 1 \\ ax^2 + ax + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & si\ x > 0 \\ (x+a)^2 & si\ x \leq 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & si\ x < 1 \\ ax - 4 & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & si\ x > 2 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & si\ x \leq \pi \\ ax^2 - a & si\ x > \pi \end{cases}$

Ejercicio 18 (Teorema de Bolzano (TB)) *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + e^x - 4$ y los intervalos $I = [-3, -1]$ y $J = [0, 3]$. Indicar la opción correcta:*

1. *f está en las hipótesis del TB en I y en J.*
2. *f está en las hipótesis del TB en I pero no en J.*
3. *f está en las hipótesis del TB en J pero no en I.*
4. *f no está en las hipótesis del TB ni para I ni para J.*

Ejercicio 19 (Aplicaciones del Teorema de Bolzano)

1. *Demuestre que la ecuación dada $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución.*
2. *En los siguientes casos, hallar un entero n para el cual existe x tal que $n \leq x \leq n+1$ y $f(x) = 0$:*
   a) $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$
   b) $x + e^x$
3. *Demostrar que existe un número x tal que:*
   a) $\sin(x) = x - 1$
   b) $5\sin(x) = \cos(x)^2$
   c) $\sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$
4. *Probar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo (1,2):*

$$x\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 5 = \log(x) - e^x$$