Cartografía Matemática

1480

TCI13

Roberto Pérez Rodino - rodino@fing.edu.uy
Esteban Striewe - estriewe@fing.edu.uy

Año 2024

LAMBERT

LAMBERT

L A M B E R T

Johann Heinrich Lambert.

L A M B E R T

Johann Heinrich Lambert.

Matemático, físico, astrónomo y filósofo.

Nació en Mulhouse, 26 de agosto de 1728.

Feneció en Berlín, 25 de setiembre de 1777.

LAMBERT

Johann Heinrich Lambert.

Matemático, físico, astrónomo y filósofo.

Nació en Mulhouse, 26 de agosto de 1728.

Feneció en Berlín, 25 de setiembre de 1777.

Presentó la proyección conforme cónica de Lambert en 1772.

L A M B E R T

Johann Heinrich Lambert.

LAMBERT

J.H. Lambert presentó varias proyecciones.

Algunas de ellas son:

- Plana equivalente de Lambert
- Cónica equivalente de Lambert
- Azimutal equivalente de Lambert
- Cilíndrica equivalente de Lambert
- Cónica conforme de Lambert

LAMBERT

J.H. Lambert presentó varias proyecciones.

Algunas de ellas son:

- Plana equivalente de Lambert
- Cónica equivalente de Lambert
- Azimutal equivalente de Lambert
- Cilíndrica equivalente de Lambert
- **Cónica conforme de Lambert**

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Conforme:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Conforme: conserva los ángulos

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Conforme: conserva los ángulos

Superficie subjetiva de transición:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Conforme: conserva los ángulos

Superficie subjetiva de transición: el cono

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Conforme: conserva los ángulos

Superficie subjetiva de transición: el cono

Directa:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Conforme: conserva los ángulos

Superficie subjetiva de transición: el cono

Directa: el eje de la superficie subjetiva coincide con el de la objetiva

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Conforme: conserva los ángulos

Superficie subjetiva de transición: el cono

Directa: el eje de la superficie subjetiva coincide con el de la objetiva

Pseudogeométrica:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Conforme: conserva los ángulos

Superficie subjetiva de transición: el cono

Directa: el eje de la superficie subjetiva coincide con el de la objetiva

Pseudogeométrica: Si bien los paralelos se representan como arcos de circunferencia concéntricos en el polo, y los meridianos por rectas que convergen en el polo, la ley de la proyección supone expresiones matemáticas complejas.

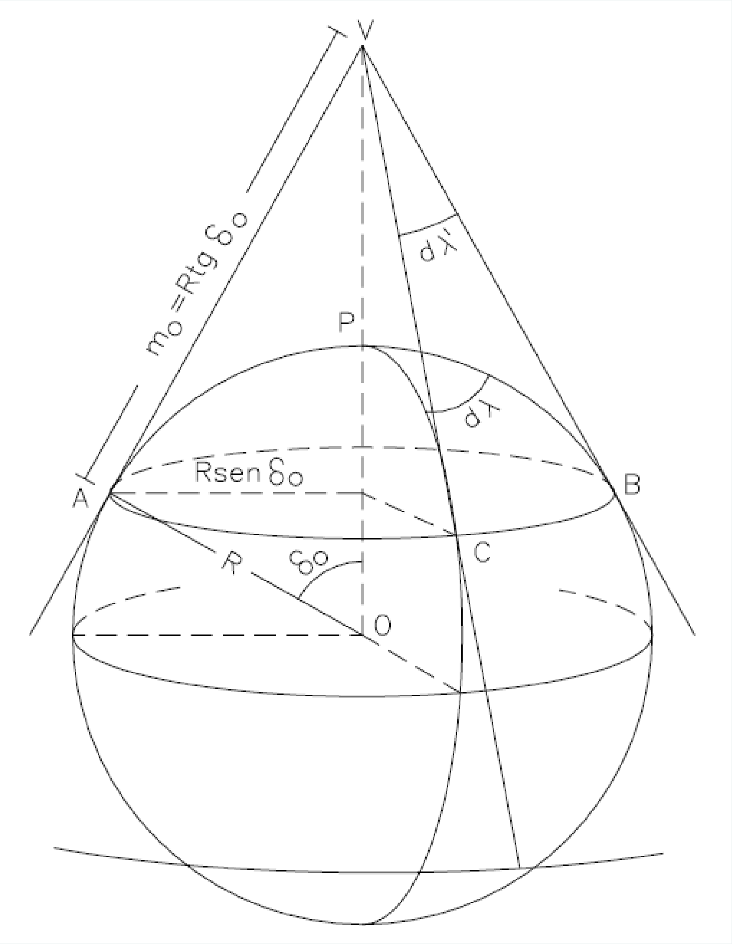
CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Para comenzar a trabajar con esta proyección, prescindiremos del aplastamiento terrestre. Es decir, comenzaremos considerando a la superficie objetiva como una esfera.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Para comenzar a trabajar con esta proyección, prescindiremos del aplastamiento terrestre. Es decir, comenzaremos considerando a la superficie objetiva como una esfera.

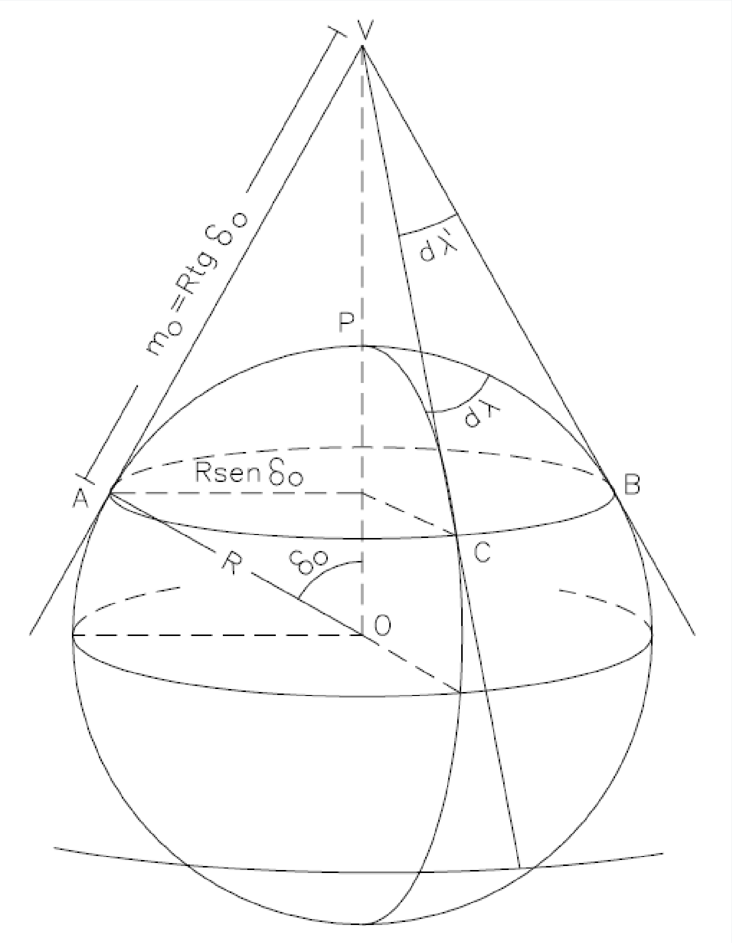
Por lo tanto, veamos:



CONICA CONFORME DE L A M B E R T

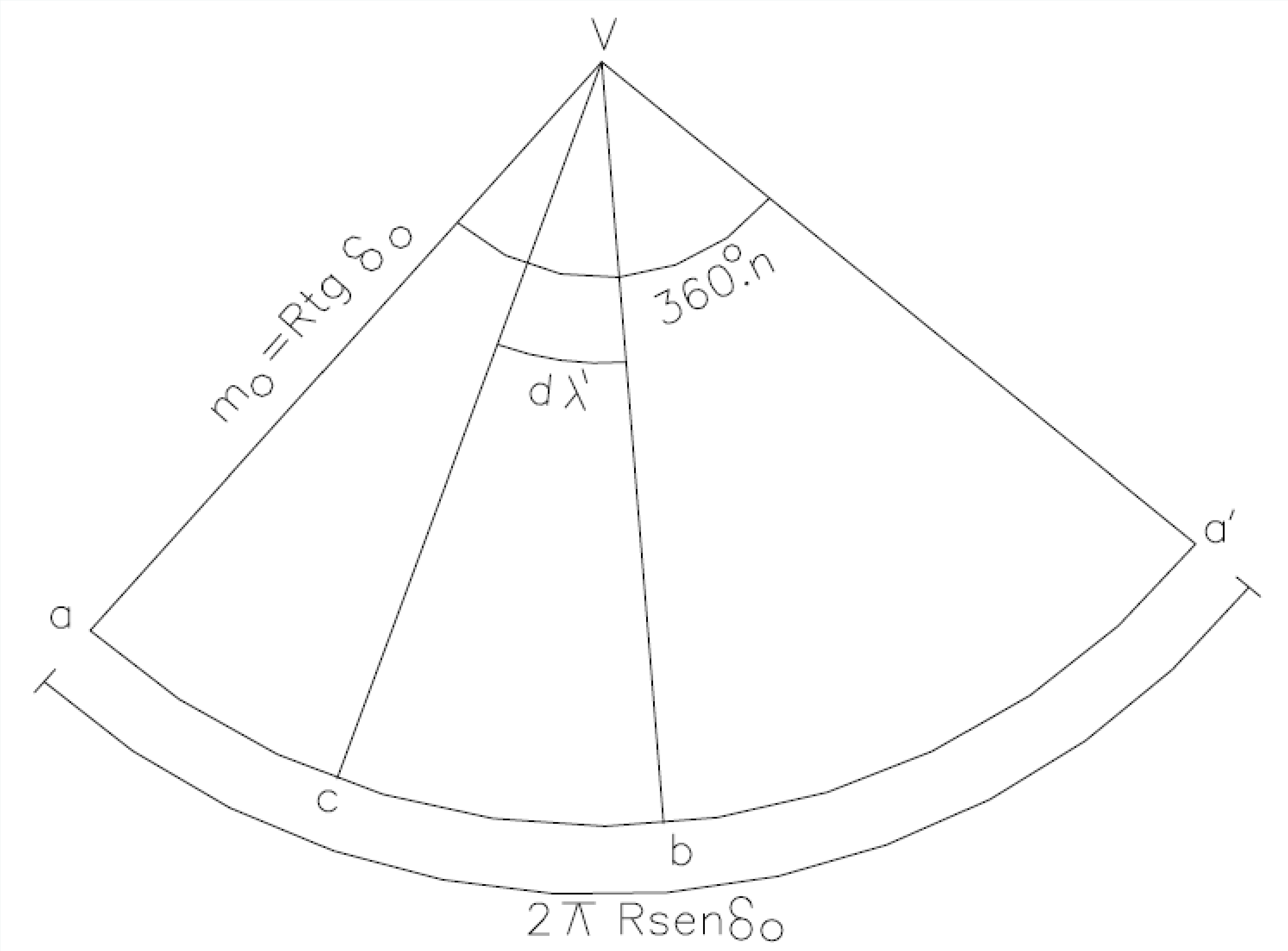
Para comenzar a trabajar con esta proyección, prescindiremos del aplastamiento terrestre. Es decir, comenzaremos considerando a la superficie objetiva como una esfera.

Por lo tanto, veamos:

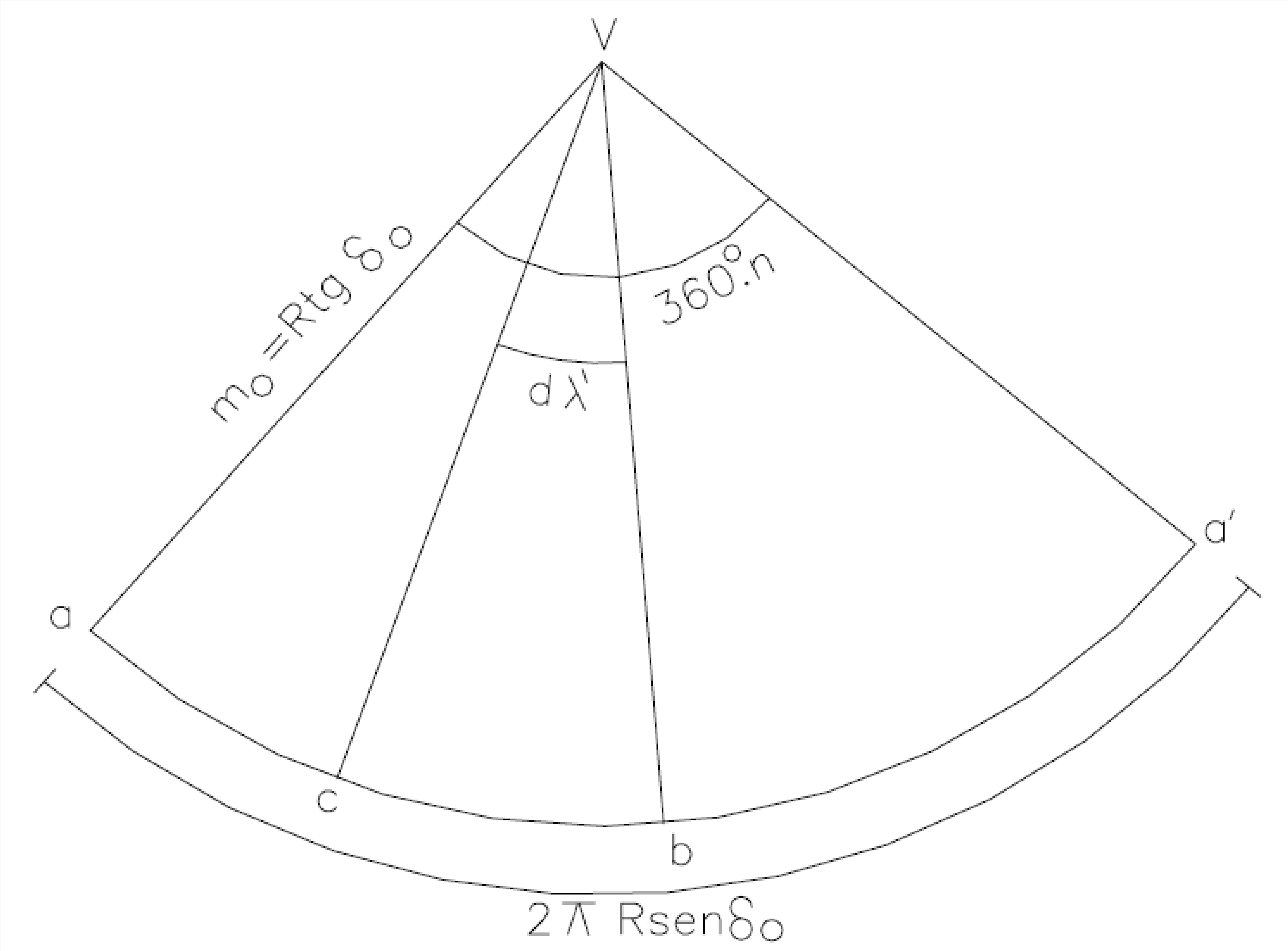


Ahora desarrollemos el cono.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

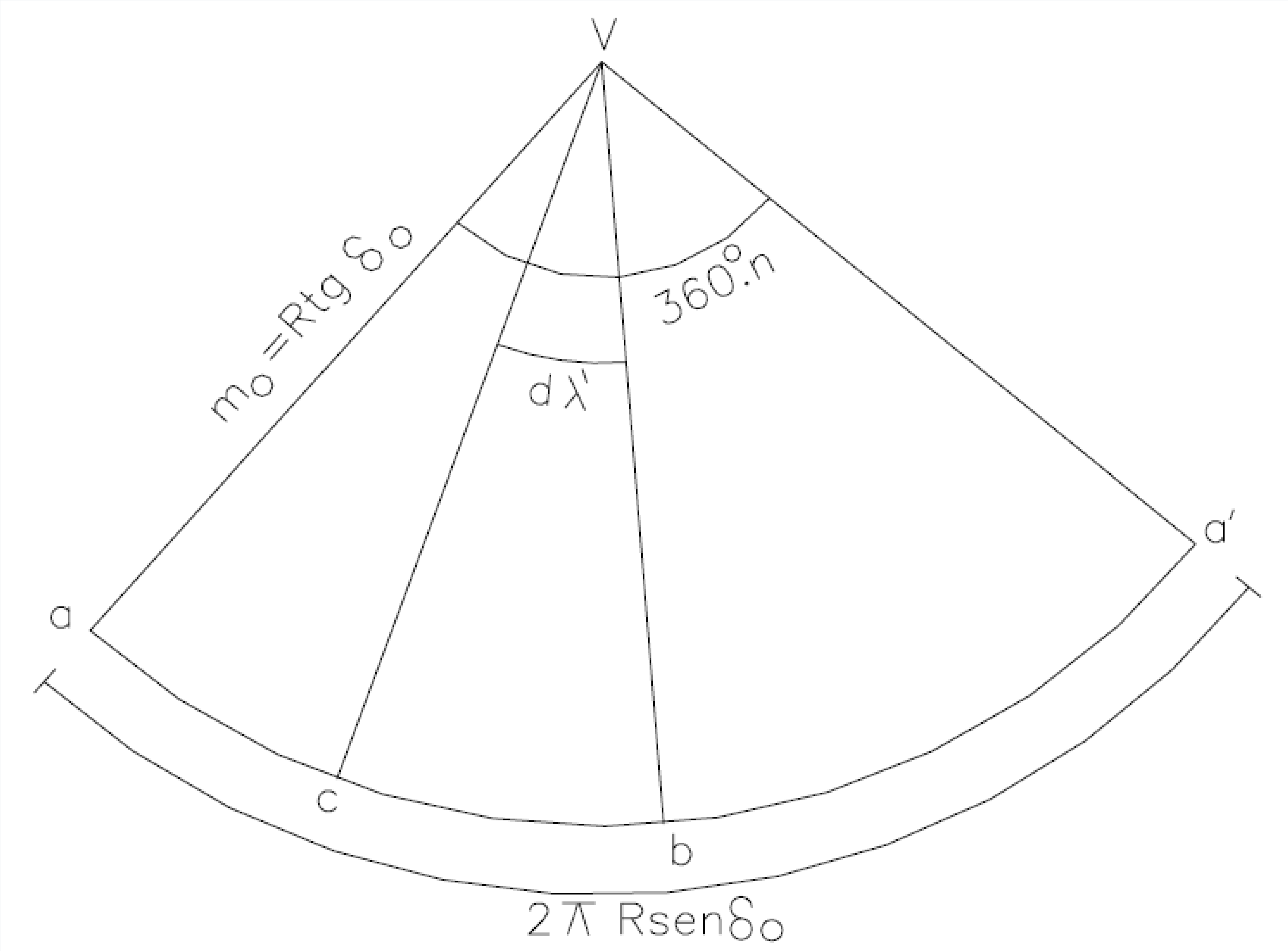


CONICA CONFORME DE L A M B E R T



aba’, es un arco circular correspondiente al paralelo de tangencia:

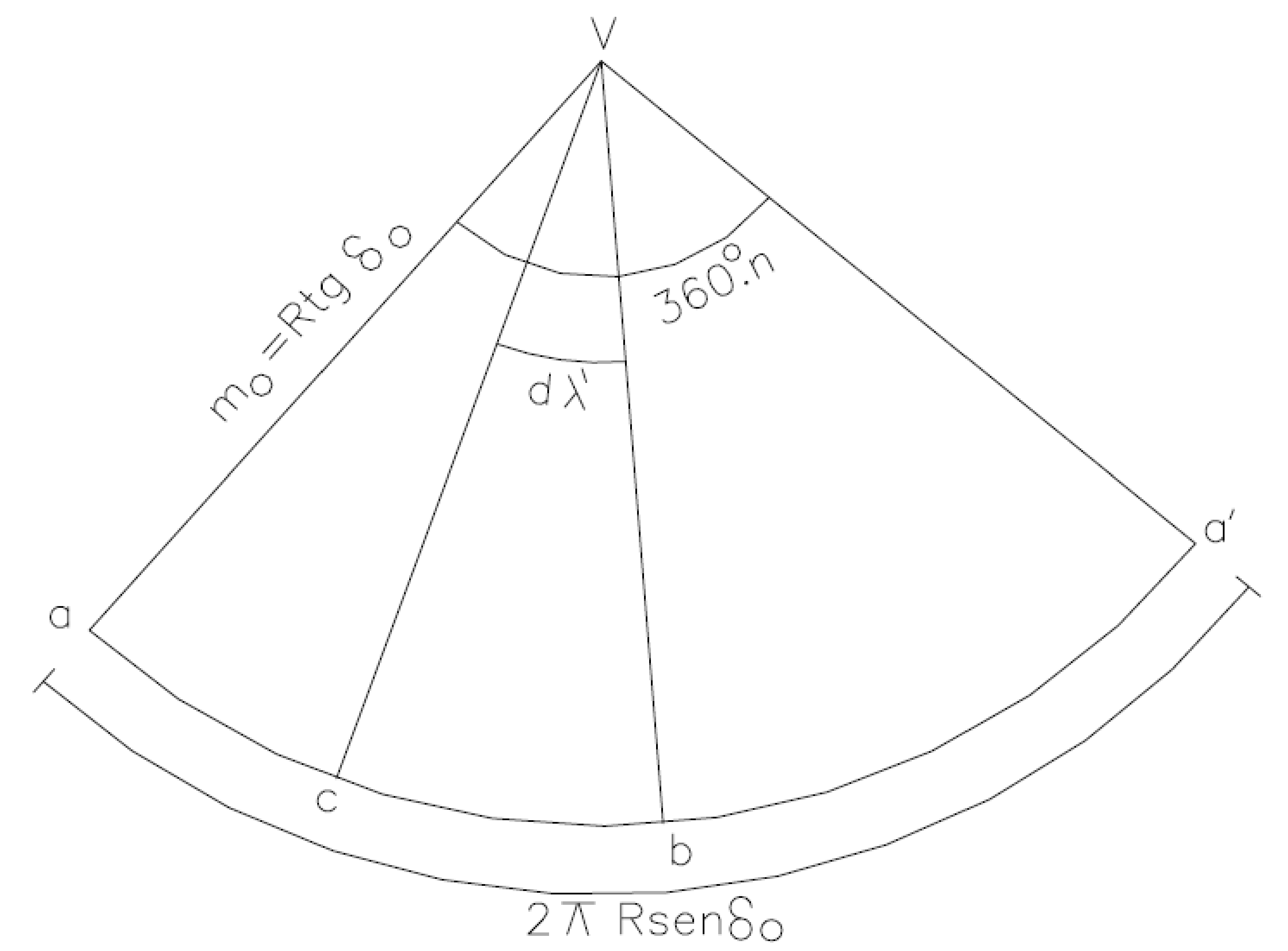
CONICA CONFORME DE L A M B E R T



aba', es un arco circular correspondiente al paralelo de tangencia:

$$aba' = 2\pi R sen\,\delta_0$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

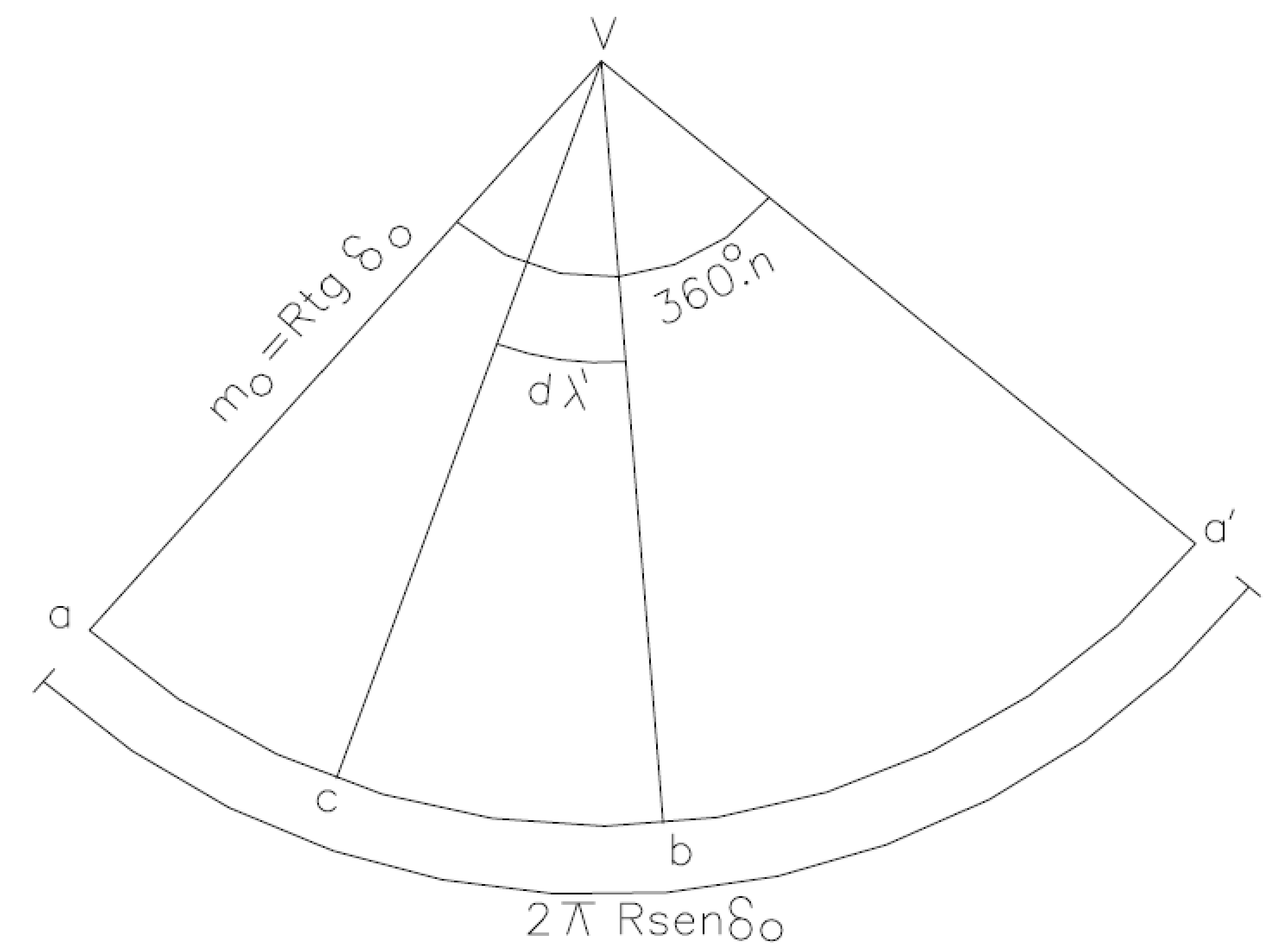


aba', es un arco circular correspondiente al paralelo de tangencia:

$$aba' = 2\pi R sen\,\delta_0$$

aVa', es el homólogo del ángulo de 360° descrito por la generatriz VA de la figura anterior:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T



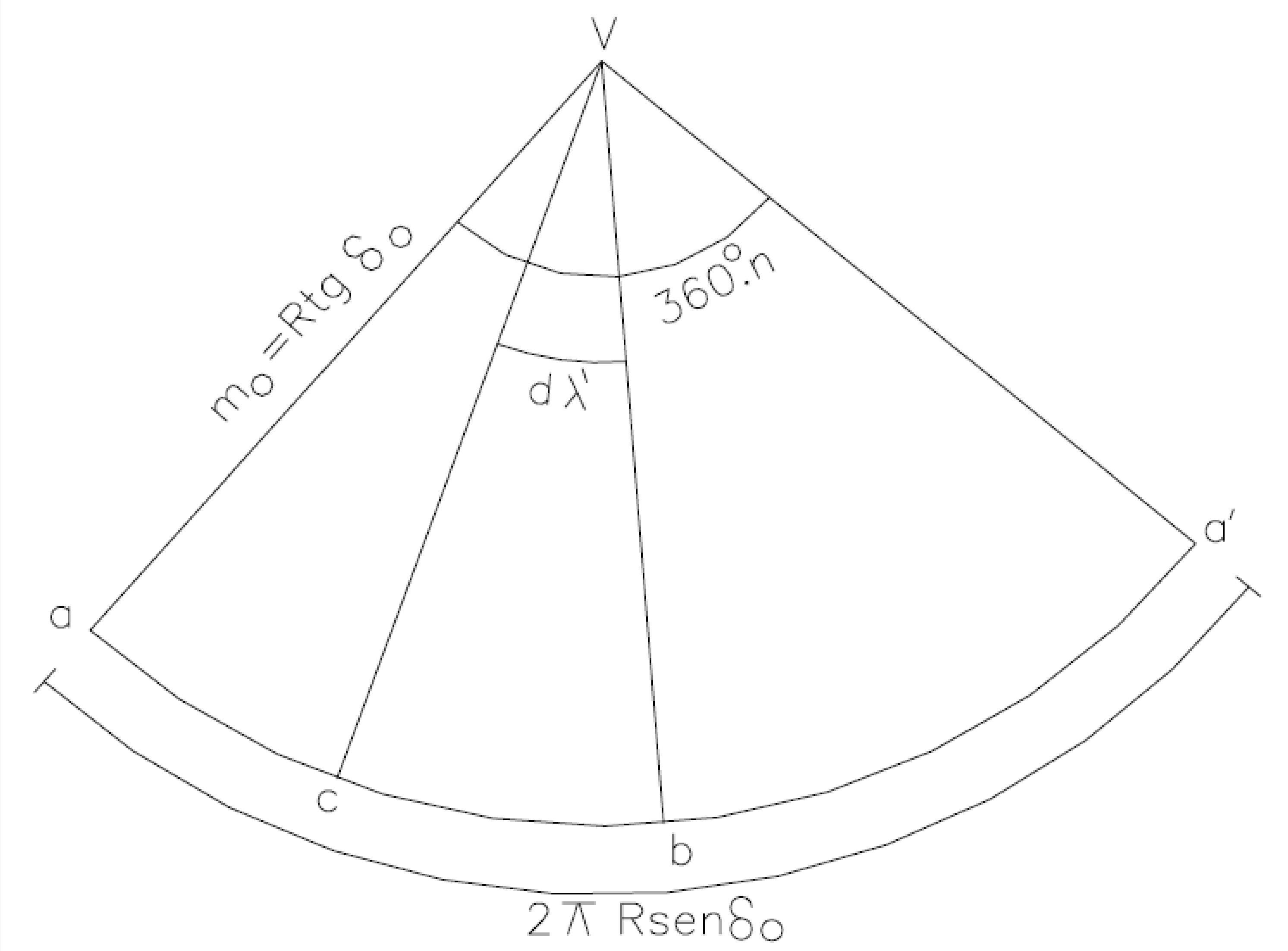
aba', es un arco circular correspondiente al paralelo de tangencia:

$$aba' = 2\pi R sen\,\delta_0$$

aVa', es el homólogo del ángulo de 360° descrito por la generatriz VA de la figura anterior:

$$a\hat{V}a' = \frac{\text{arco aba}'}{m_0}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T



aba’, es un arco circular correspondiente al paralelo de tangencia:

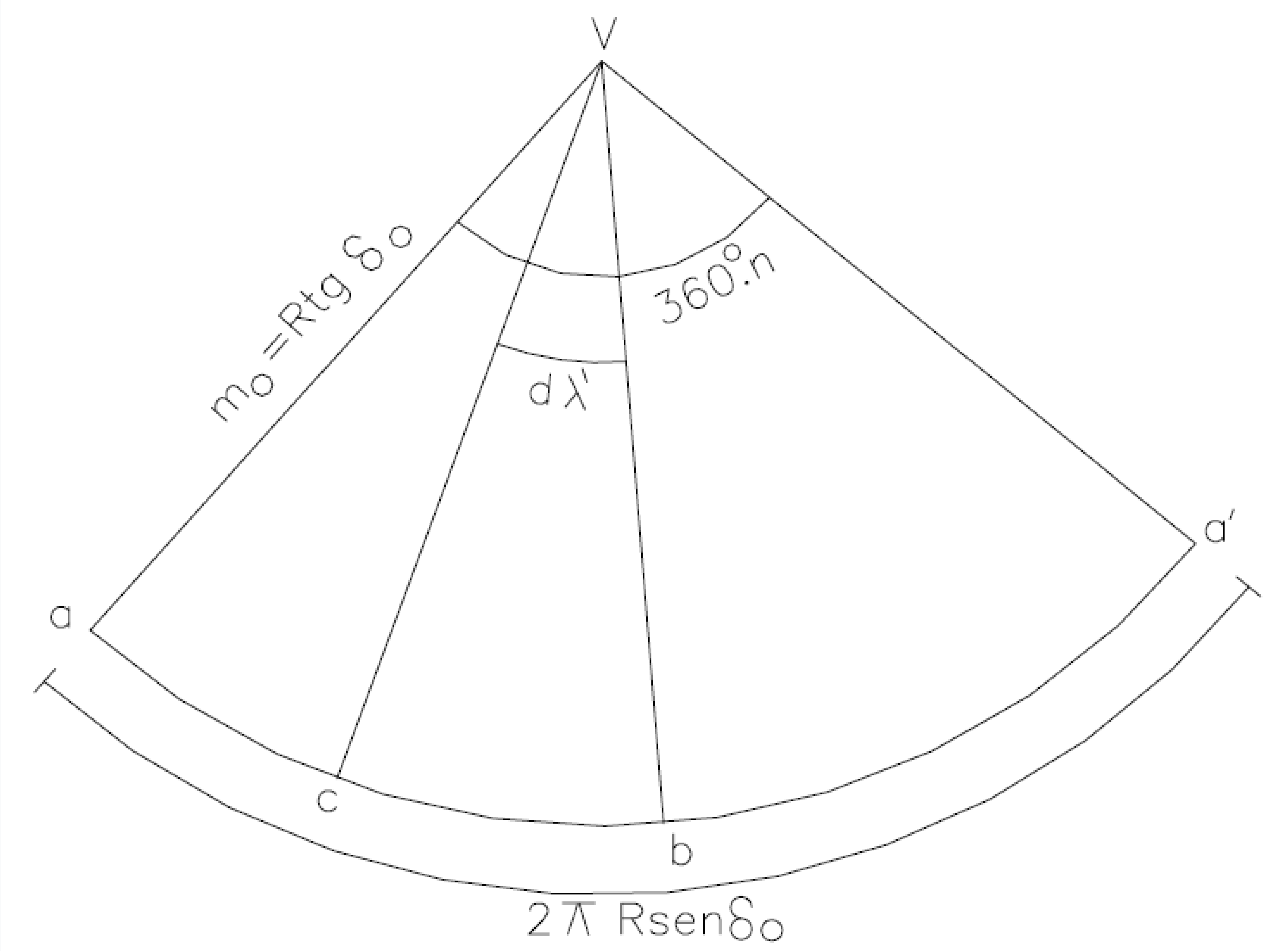
$$aba' = 2\pi R sen\,\delta_0$$

aVa’, es el homólogo del ángulo de 360° descrito por la generatriz VA de la figura anterior:

$$a\hat{V}a' = \frac{\text{arco aba}'}{m_0}$$

m_0 es el radio de la transformada del paralelo de tangencia.

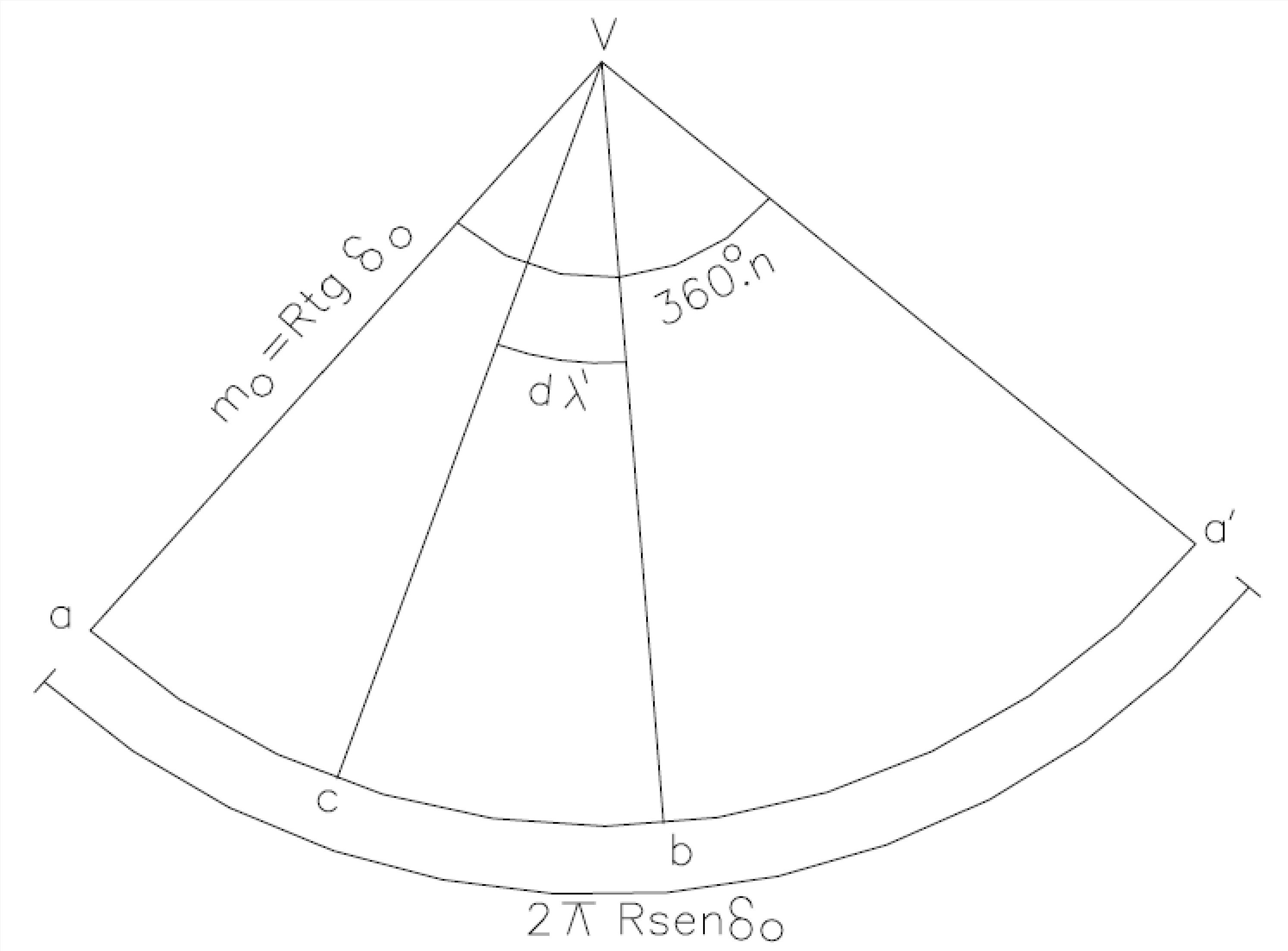
CONICA CONFORME DE L A M B E R T



$$a\hat{V}a' = \frac{\text{arco aba}'}{m_0}$$

$$a\hat{V}a' = \frac{2\pi R sen\,\delta_0}{Rtg\delta_0} = 2\pi\cos\delta_0$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

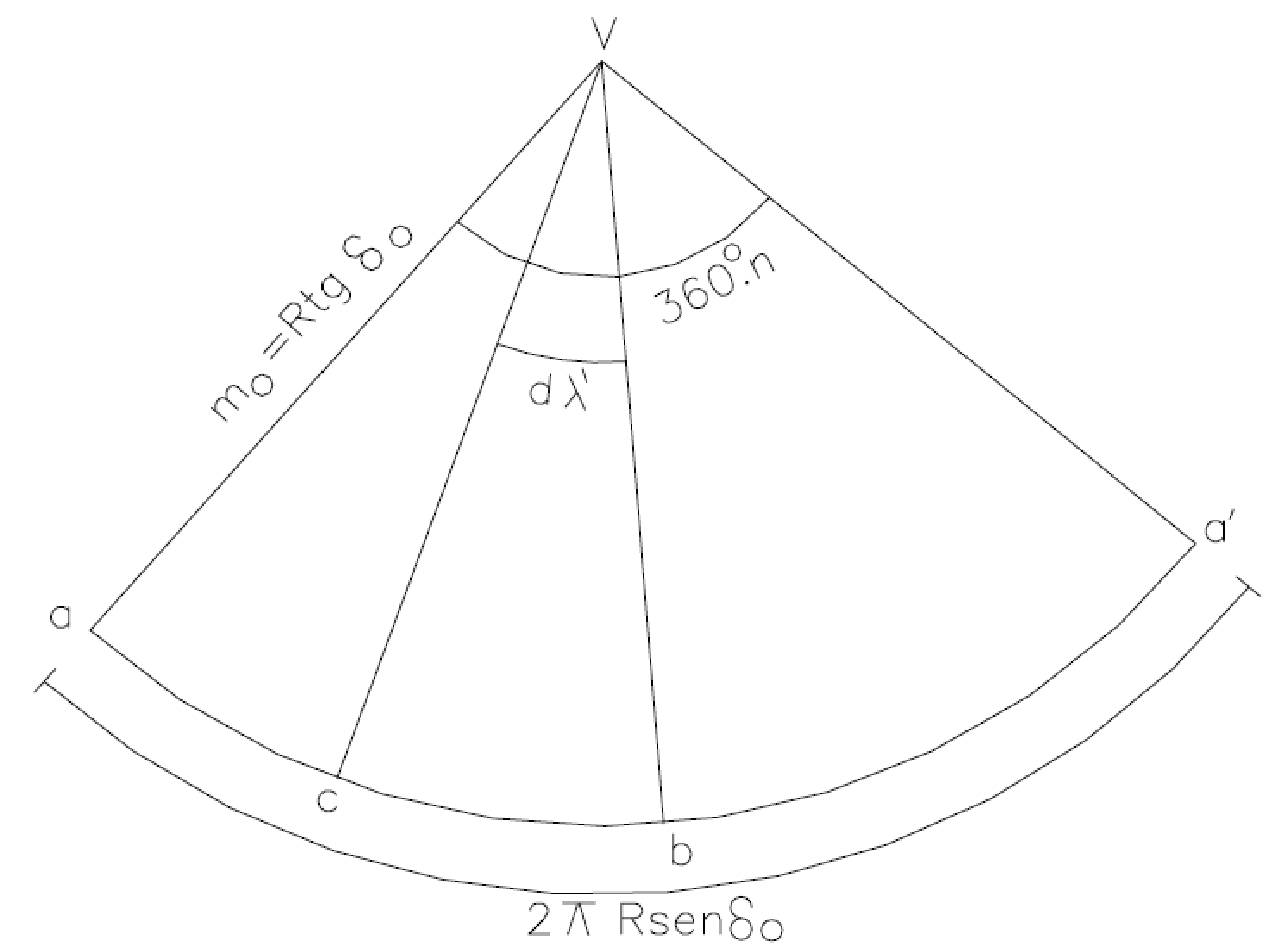


$$a\hat{V}a' = \frac{\text{arco aba}'}{m_0}$$

$$a\hat{V}a' = \frac{2\pi R sen\,\delta_0}{R tg\,\delta_0} = 2\pi \cos\delta_0$$

Se aprecia que al desarrollar el cono en el plano, el ángulo de 360° o 2π del vértice del cono se reduce según la siguiente proporción:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T



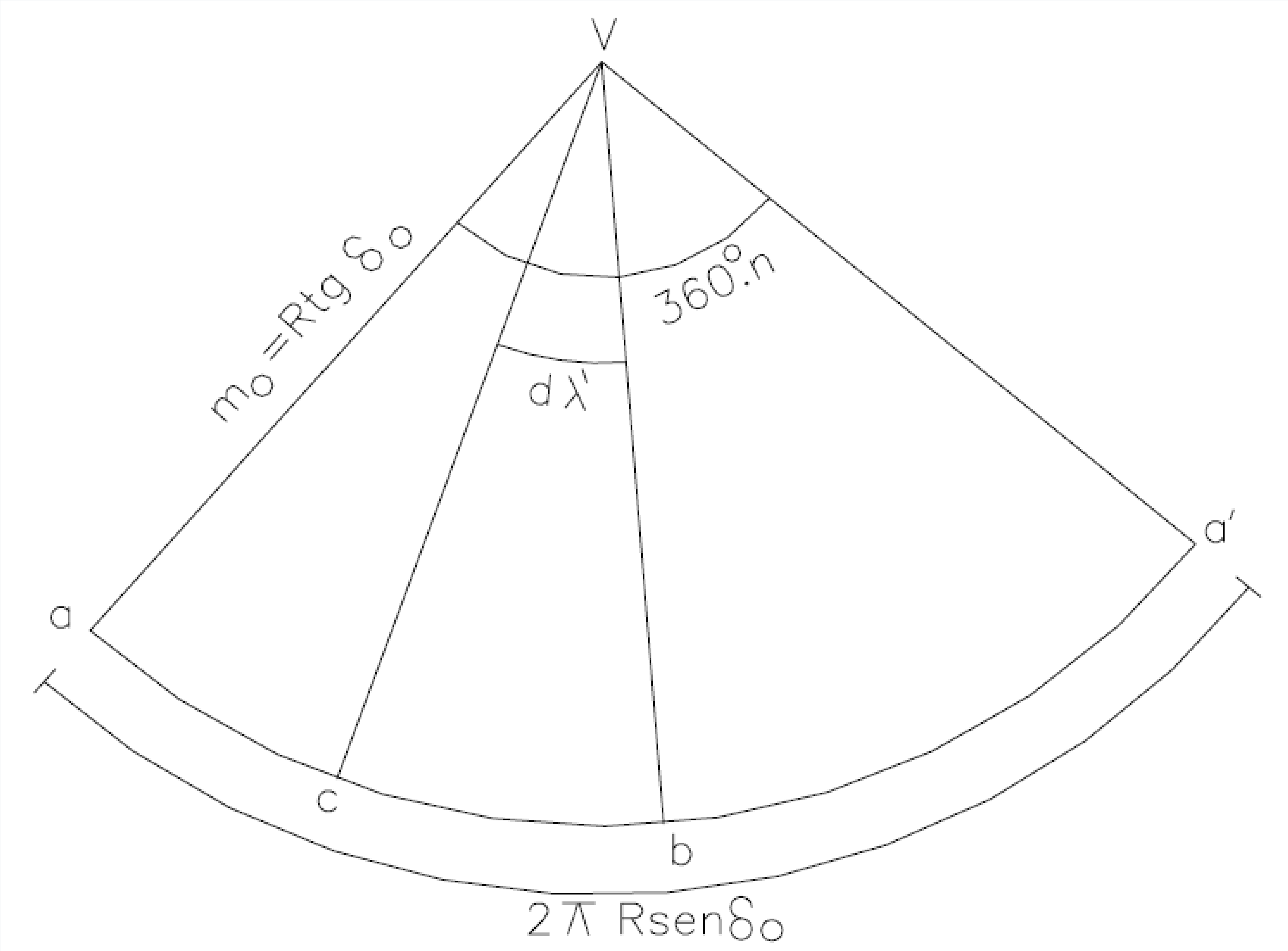
$$a\hat{V}a' = \frac{\text{arco aba}'}{m_0}$$

$$a\hat{V}a' = \frac{2\pi R sen\,\delta_0}{R tg\,\delta_0} = 2\pi \cos\delta_0$$

Se aprecia que al desarrollar el cono en el plano, el ángulo de 360° o 2π del vértice del cono se reduce según la siguiente proporción:

$$\frac{2\pi \cos\delta_0}{2\pi} = \cos\delta_0 = n$$

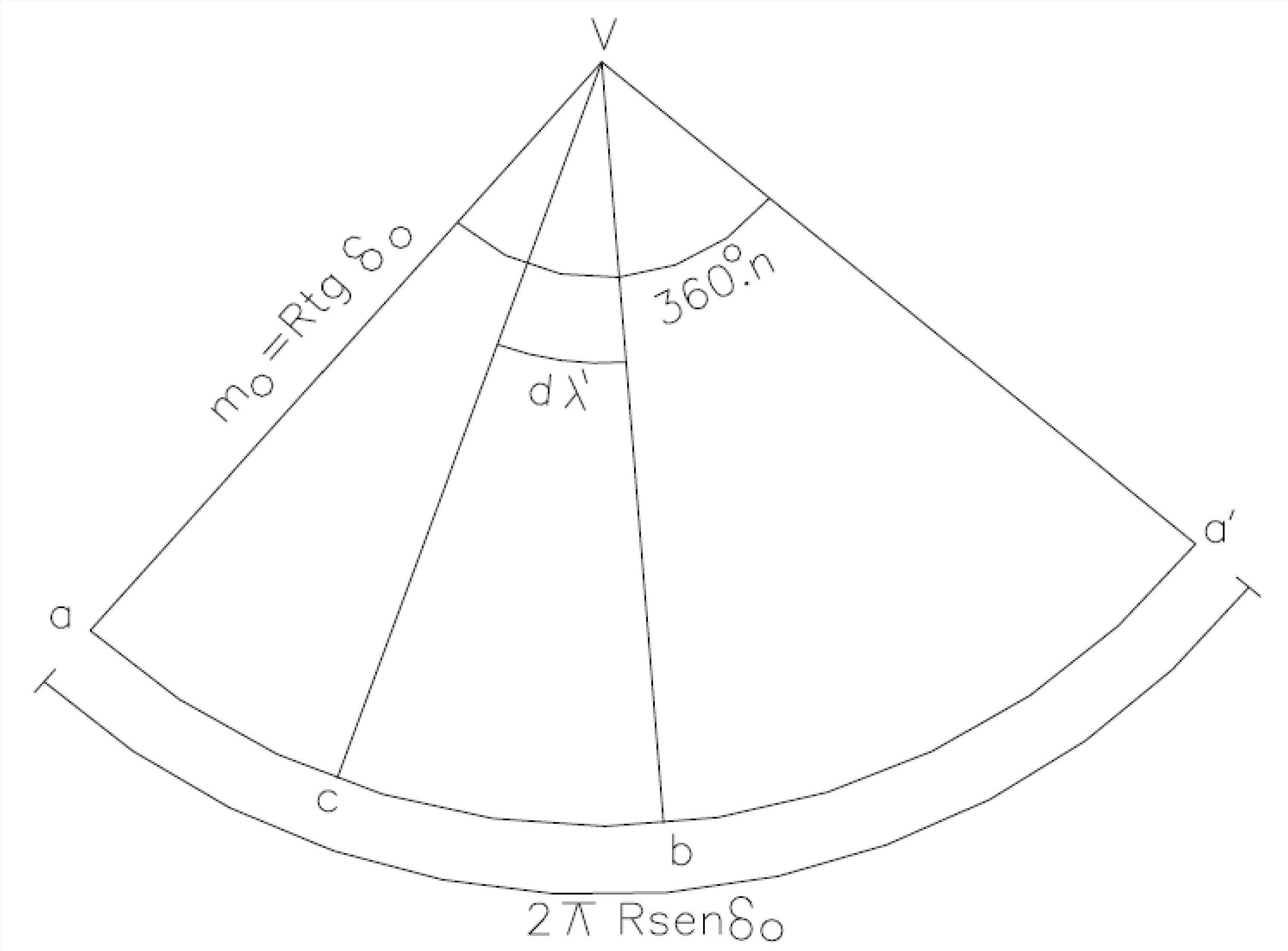
CONICA CONFORME DE L A M B E R T



$$\cos \delta_0 = n$$

Llamando dλ al ángulo entre dos meridianos cualesquiera, podemos decir que en la proyección desarrollada, a ese ángulo le corresponderá un ángulo dλ' = dλ x *n* .

CONICA CONFORME DE L A M B E R T



$$\cos \delta_0 = n$$

Llamando dλ al ángulo entre dos meridianos cualesquiera, podemos decir que en la proyección desarrollada, a ese ángulo le corresponderá un ángulo dλ' = dλ x *n* .

Este coeficiente *n*, se conoce como *coeficiente de reducción*.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Conocida la Ley de la Proyección y el coeficiente de reducción, se podrá trazar el canevás de una proyección cónica, determinando los puntos a representar por sus coordenadas polares:

$m = f(\delta)$ $\Delta\lambda' = n\Delta\lambda$ Calculadas en función de las coordenadas geográficas.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Conocida la Ley de la Proyección y el coeficiente de reducción, se podrá trazar el canevás de una proyección cónica, determinando los puntos a representar por sus coordenadas polares:

$m = f(\delta)$ $\Delta\lambda' = n\Delta\lambda$ Calculadas en función de las coordenadas geográficas.

También podemos considerar un sistema de coordenadas cartesiano, considerando como origen un punto O en el paralelo de tangencia, y como ejes, al meridiano por O y una recta perpendicular por O.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

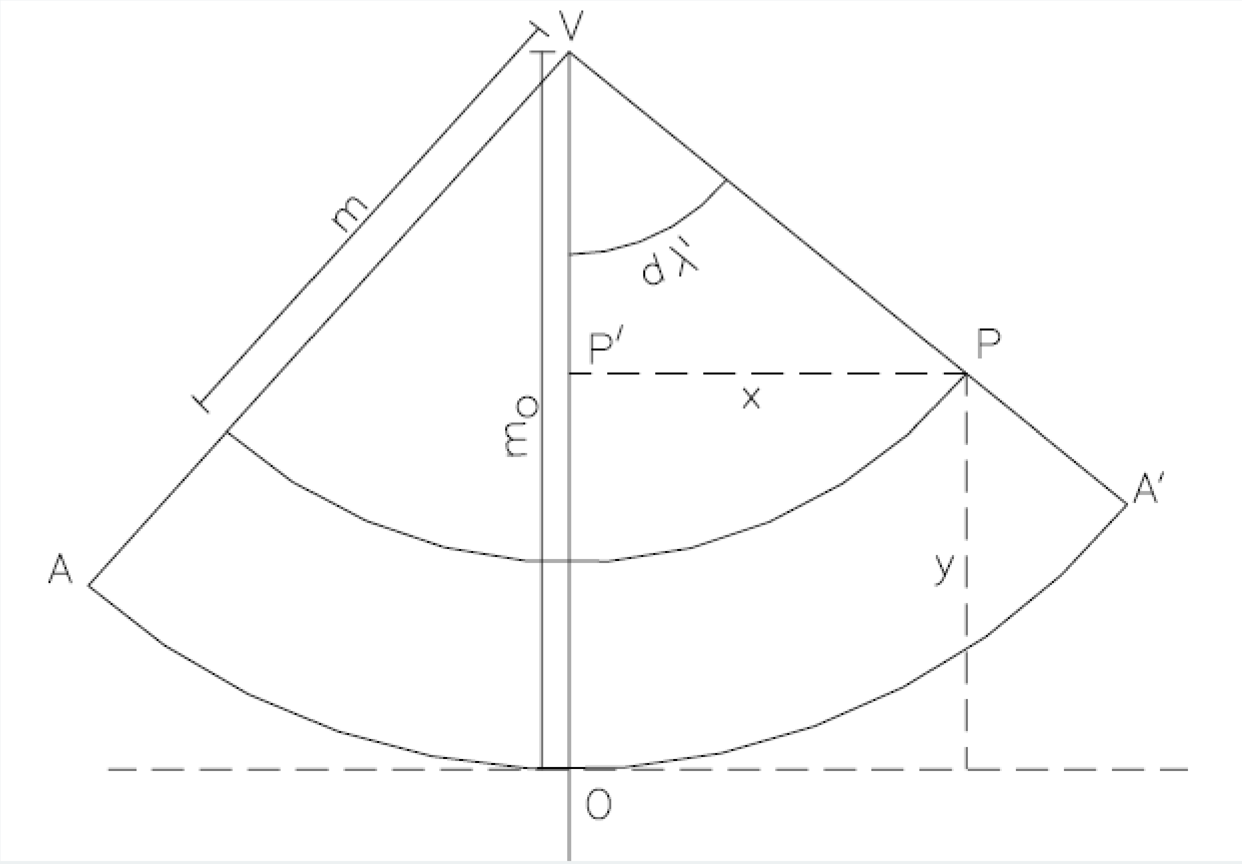
Conocida la Ley de la Proyección y el coeficiente de reducción, se podrá trazar el canevás de una proyección cónica, determinando los puntos a representar por sus coordenadas polares:

$m = f(\delta)$ $\Delta\lambda' = n\Delta\lambda$ Calculadas en función de las coordenadas geográficas.

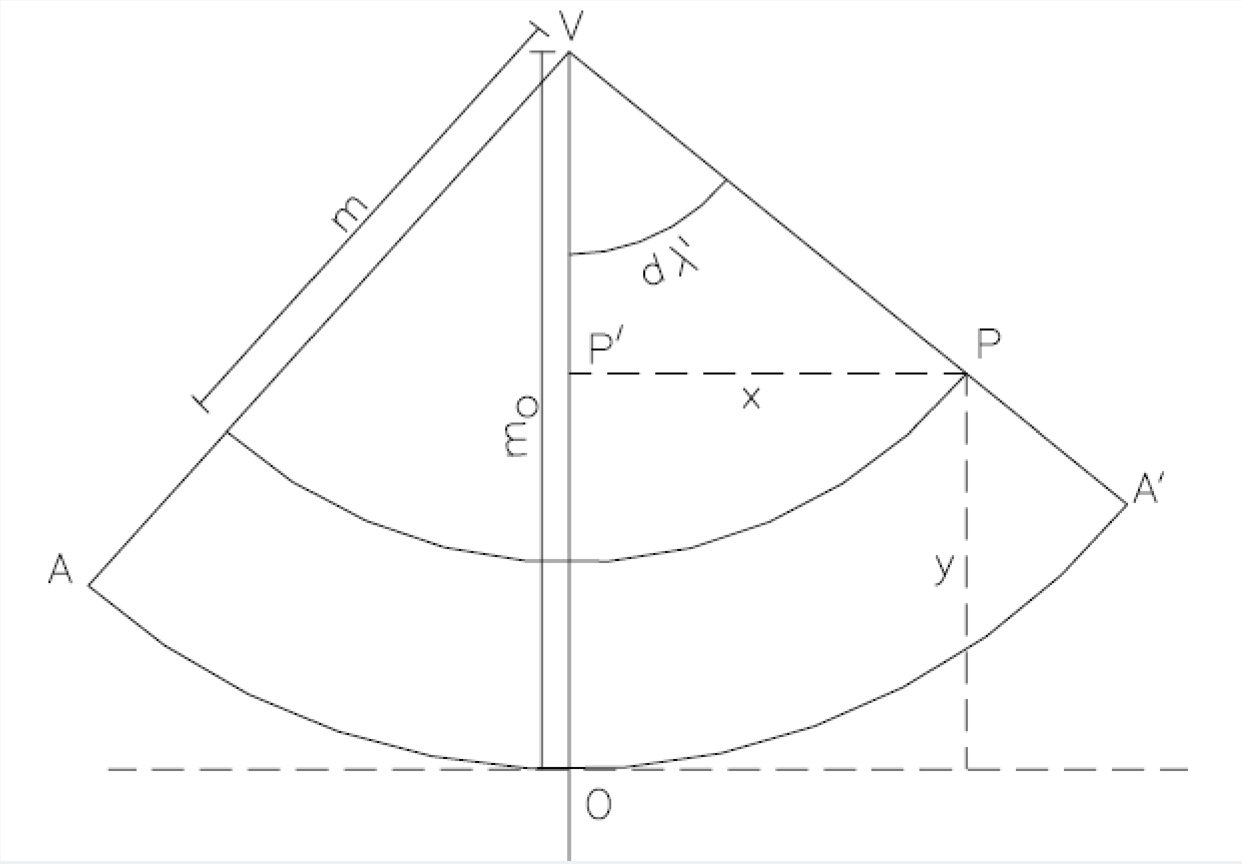
También podemos considerar un sistema de coordenadas cartesiano, considerando como origen un punto O en el paralelo de tangencia, y como ejes, al meridiano por O y una recta perpendicular por O.

Veamos la figura que sigue:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

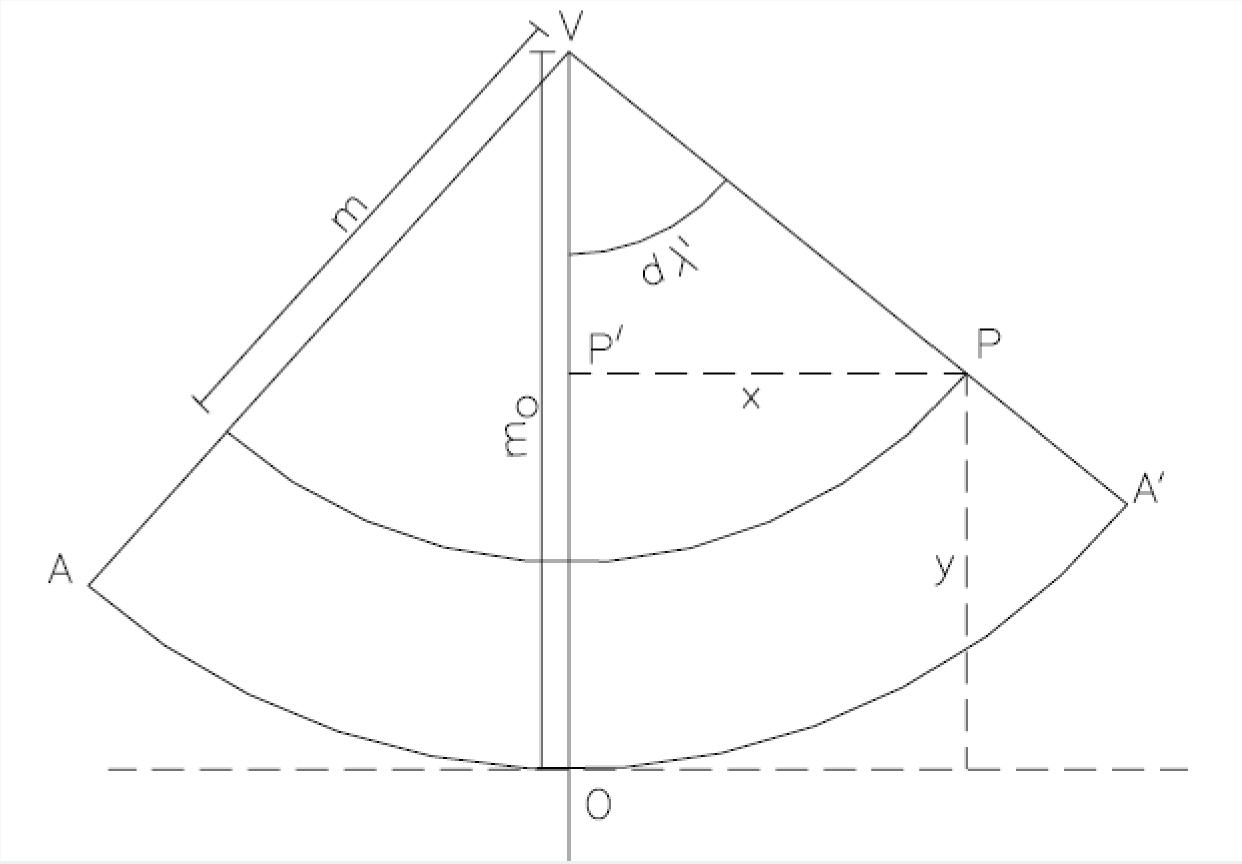


CONICA CONFORME DE L A M B E R T



Las coordenadas rectangulares las podremos calcular de esta manera:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T



Las coordenadas rectangulares las podremos calcular de esta manera:

$$E = x = m.sen\Delta\lambda' = m.sen(n\Delta\lambda)$$

$$N = y = \overline{OV} - \overline{P'V} = Rtg\delta_0 - m.\cos\Delta\lambda' = Rtg\delta_0 - m.\cos(n\Delta\lambda)$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Dados por la relación entre la magnitud de un elemento infinitesimal en la proyección y la magnitud del elemento correspondiente en la superficie objetivo.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Coeficientes de deformación</u>

Dados por la relación entre la magnitud de un elemento infinitesimal en la proyección y la magnitud del elemento correspondiente en la superficie objetivo.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Dados por la relación entre la magnitud de un elemento infinitesimal en la proyección y la magnitud del elemento correspondiente en la superficie objetivo.

Coeficientes de deformación meridiano

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Dados por la relación entre la magnitud de un elemento infinitesimal en la proyección y la magnitud del elemento correspondiente en la superficie objetivo.

Coeficientes de deformación meridiano

$$\beta = \frac{dm}{R d\delta}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Dados por la relación entre la magnitud de un elemento infinitesimal en la proyección y la magnitud del elemento correspondiente en la superficie objetivo.

Coeficientes de deformación meridiano $\beta = \dfrac{dm}{R d\delta}$

Coeficientes de deformación transversal o paralelo

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Dados por la relación entre la magnitud de un elemento infinitesimal en la proyección y la magnitud del elemento correspondiente en la superficie objetivo.

Coeficientes de deformación meridiano $\beta = \dfrac{dm}{R d\delta}$

Coeficientes de deformación transversal o paralelo

Siendo *m* el radio de la transformada del paralelo considerado y sabiendo que *dλ* una vez desarrollado el cono se reduce a *dλ'= n.dλ*:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Coeficientes de deformación</u>

Dados por la relación entre la magnitud de un elemento infinitesimal en la proyección y la magnitud del elemento correspondiente en la superficie objetivo.

Coeficientes de deformación meridiano

$$\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$$

Coeficientes de deformación transversal o paralelo

Siendo *m* el radio de la transformada del paralelo considerado y sabiendo que *dλ* una vez desarrollado el cono se reduce a *dλ'= n.dλ*:

$$\alpha = \frac{m.n.d\lambda}{Rsen\,\delta.d\lambda} = \frac{m.n}{Rsen\,\delta}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Dados por la relación entre la magnitud de un elemento infinitesimal en la proyección y la magnitud del elemento correspondiente en la superficie objetivo.

Coeficientes de deformación meridiano

$$\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$$

Coeficientes de deformación transversal o paralelo

Siendo *m* el radio de la transformada del paralelo considerado y sabiendo que *dλ* una vez desarrollado el cono se reduce a *dλ'= n.dλ*:

$$\alpha = \frac{m.n.d\lambda}{Rsen\,\delta.d\lambda} = \frac{m.n}{Rsen\,\delta}$$

Coeficientes de deformación superficial

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Dados por la relación entre la magnitud de un elemento infinitesimal en la proyección y la magnitud del elemento correspondiente en la superficie objetivo.

Coeficientes de deformación meridiano

$$\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$$

Coeficientes de deformación transversal o paralelo

Siendo *m* el radio de la transformada del paralelo considerado y sabiendo que *dλ* una vez desarrollado el cono se reduce a *dλ'= n.dλ*:

$$\alpha = \frac{m.n.d\lambda}{Rsen\delta.d\lambda} = \frac{m.n}{Rsen\delta}$$

Coeficientes de deformación superficial

$$\mu = \alpha.\beta = \frac{m.n.dm}{R^2 sen\delta.d\delta}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Deformación angular máxima

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Deformación angular máxima

$$\Delta u_{MAX} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

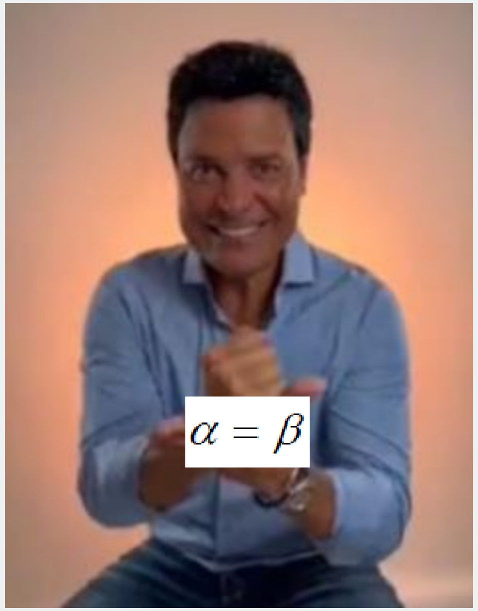
Impongamos la condición de conformidad.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Impongamos la condición de conformidad.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

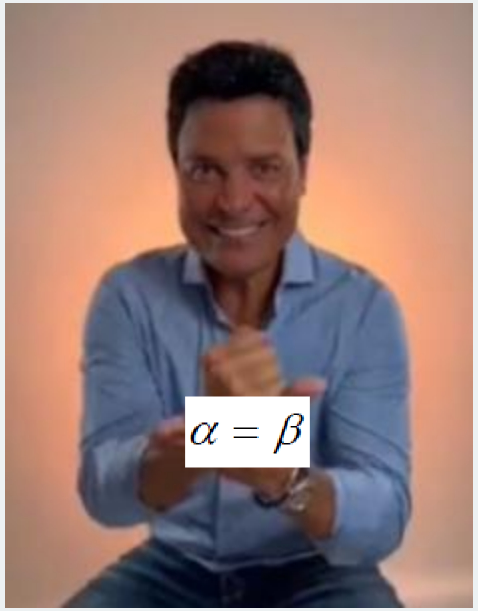
Impongamos la condición de conformidad.



CONICA CONFORME DE L A M B E R T

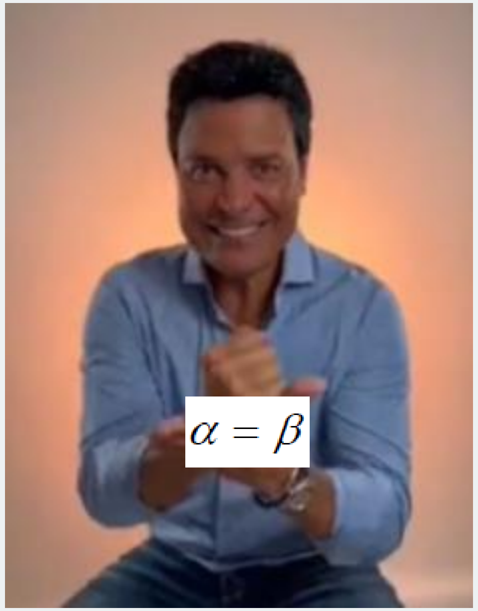
Impongamos la condición de conformidad.

$$\alpha = \beta \Rightarrow \frac{m.n}{Rsen\,\delta} = \frac{dm}{Rd\,\delta}$$



CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Impongamos la condición de conformidad.



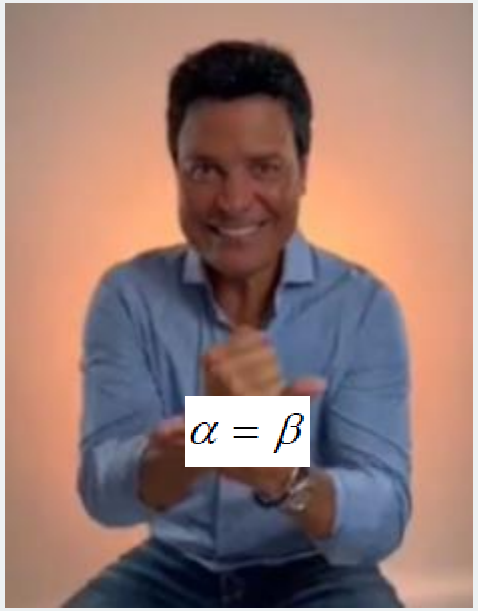
$$\alpha = \beta \Rightarrow \frac{m.n}{Rsen\,\delta} = \frac{dm}{Rd\delta}$$

Entonces:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Impongamos la condición de conformidad.

$$\alpha = \beta \Rightarrow \frac{m.n}{Rsen\delta} = \frac{dm}{Rd\delta}$$

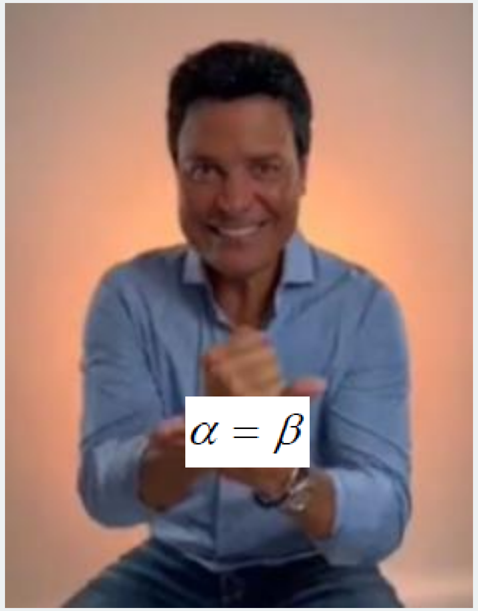


Entonces:

$$\frac{dm}{m} = n\frac{d\delta}{sen\delta} = n.\text{cosec}\,\delta.d\delta$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Impongamos la condición de conformidad.



$$\alpha = \beta \Rightarrow \frac{m.n}{R sen\,\delta} = \frac{dm}{R d\delta}$$

Entonces:

$$\frac{dm}{m} = n \frac{d\delta}{sen\,\delta} = n.\mathrm{cosec}\,\delta.d\delta$$

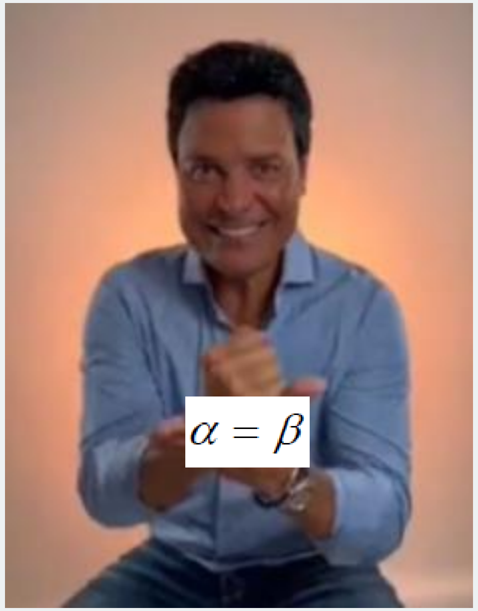
Integrando y operando:

$$m = m_e \left(tg \frac{\delta}{2} \right)^n$$

con m_e = radio de la transformada del Ecuador

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Impongamos la condición de conformidad.



$$\alpha = \beta \Rightarrow \frac{m.n}{R sen\delta} = \frac{dm}{R d\delta}$$

Entonces:

$$\frac{dm}{m} = n\frac{d\delta}{sen\delta} = n.\text{cosec}\,\delta.d\delta$$

Integrando y operando:

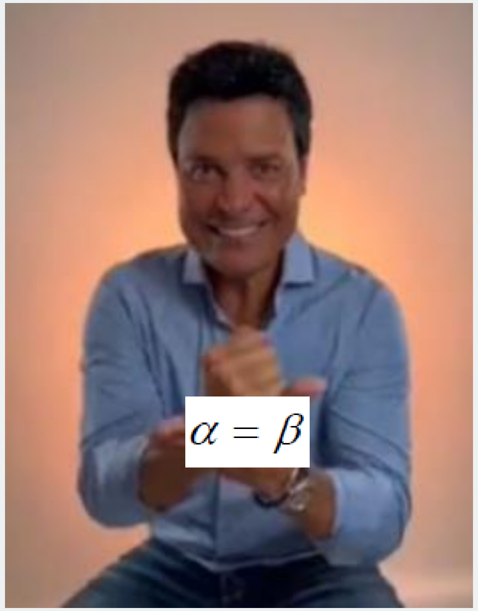
$$m = m_e\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^n$$

con m_e = radio de la transformada del Ecuador

$$\Delta\lambda' = n\Delta\lambda$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Impongamos la condición de conformidad.



$$\alpha = \beta \Rightarrow \frac{m.n}{R sen\delta} = \frac{dm}{R d\delta}$$

Entonces:

$$\frac{dm}{m} = n\frac{d\delta}{sen\delta} = n.\text{cosec}\,\delta.d\delta$$

Integrando y operando:

$$m = m_e\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^n$$

con m_e = radio de la transformada del Ecuador

$$\Delta\lambda' = n\Delta\lambda$$

Tenemos la Ley de la Proyección.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Coeficientes de deformación</u>

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{R sen\delta} = \frac{n.m_e\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^n}{R sen\delta}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Coeficientes de deformación</u>

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{Rsen\,\delta} = \frac{n.m_e\left(tg\,\dfrac{\delta}{2}\right)^n}{Rsen\,\delta}$$

Coeficiente de deformación superficial:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{Rsen\,\delta} = \frac{n.m_e\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^n}{Rsen\,\delta}$$

Coeficiente de deformación superficial:

$$\mu = \alpha.\beta = n^2 m_e{}^2\,\frac{\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{R^2 sen^2\delta}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Coeficientes de deformación

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{Rsen\,\delta} = \frac{n.m_e\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^n}{Rsen\,\delta}$$

Coeficiente de deformación superficial:

$$\mu = \alpha.\beta = n^2 m_e{}^2\,\frac{\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{R^2 sen^2\delta}$$

Deformación angular máxima:

CONICA CONFORME DE LAMBERT

Coeficientes de deformación

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{R sen\,\delta} = \frac{n.m_e\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^n}{R sen\,\delta}$$

Coeficiente de deformación superficial:

$$\mu = \alpha.\beta = n^2 m_e^{\ 2}\,\frac{\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{R^2 sen^2\delta}$$

Deformación angular máxima:

Es 0, porque la proyección es conforme.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Además de la condición general de conformidad que tiene esta proyección, se pueden obtener deformaciones lineales nulas en determinado paralelo llamado *paralelo padrón* o *de referencia*, mediante la atribución de valores convenientes a los parámetros involucrados en la Ley de la Proyección, estos son n y m_e.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Proyección cónica conforme con un paralelo padrón</u>

Además de la condición general de conformidad que tiene esta proyección, se pueden obtener deformaciones lineales nulas en determinado paralelo llamado *paralelo padrón* o *de referencia*, mediante la atribución de valores convenientes a los parámetros involucrados en la Ley de la Proyección, estos son n y m_e.

Supongamos que el paralelo padrón es el paralelo de tangencia de colatitud δ_0. En estas condiciones y atribuyendo a n el valor $\cos \delta_0$, el radio de la transformada del paralelo de tangencia estará dado por

$$m_0 = R\,tg\,\delta_0 = m_e \left(tg \frac{\delta_0}{2} \right)^{\cos \delta_0}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Además de la condición general de conformidad que tiene esta proyección, se pueden obtener deformaciones lineales nulas en determinado paralelo llamado *paralelo padrón* o *de referencia*, mediante la atribución de valores convenientes a los parámetros involucrados en la Ley de la Proyección, estos son n y m_e.

Supongamos que el paralelo padrón es el paralelo de tangencia de colatitud δ_0. En estas condiciones y atribuyendo a n el valor $\cos \delta_0$, el radio de la transformada del paralelo de tangencia estará dado por

$$m_0 = Rtg\,\delta_0 = m_e\left(tg\,\frac{\delta_0}{2}\right)^{\cos\delta_0}$$

Y esto nos permite calcular m_e:

$$m_e = \frac{Rtg\,\delta_0}{\left(tg\,\frac{\delta_0}{2}\right)^{\cos\delta_0}} = Rtg\,\delta_0\left(tg\,\frac{\delta_0}{2}\right)^{-\cos\delta_0}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Introduciendo el valor de m_e en la expresión de la Ley de la Proyección, obtenemos

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Introduciendo el valor de m_e en la expresión de la Ley de la Proyección, obtenemos

$$m = m_e \left(tg\,\frac{\delta}{2} \right)^n = R tg\,\delta_0 \left(tg\,\frac{\delta_0}{2} \right)^{-\cos\delta_0} . \left(tg\,\frac{\delta}{2} \right)^{\cos\delta_0}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Proyección cónica conforme con un paralelo padrón</u>

Introduciendo el valor de m_e en la expresión de la Ley de la Proyección, obtenemos

$$m = m_e\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^n = Rtg\delta_0\left(tg\frac{\delta_0}{2}\right)^{-\cos\delta_0}.\left(tg\frac{\delta}{2}\right)^{\cos\delta_0}$$

Que es lo mismo que

$$m = Rtg\delta_0\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_0}{2}}\right)^{\cos\delta_0}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Introduciendo el valor de m_e en la expresión de la Ley de la Proyección, obtenemos

$$m = m_e \left(tg\,\frac{\delta}{2} \right)^n = Rtg\,\delta_0 \left(tg\,\frac{\delta_0}{2} \right)^{-\cos\delta_0} \cdot \left(tg\,\frac{\delta}{2} \right)^{\cos\delta_0}$$

Que es lo mismo que

$$m = Rtg\delta_0 \left(\frac{tg\,\frac{\delta}{2}}{tg\,\frac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos\delta_0}$$

Y junto con $\Delta\lambda' = \cos\delta_0 \Delta\lambda$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Proyección cónica conforme con un paralelo padrón</u>

Introduciendo el valor de m_e en la expresión de la Ley de la Proyección, obtenemos

$$m = m_e\left(tg\,\frac{\delta}{2}\right)^n = Rtg\,\delta_0\left(tg\,\frac{\delta_0}{2}\right)^{-\cos\delta_0}\cdot\left(tg\,\frac{\delta}{2}\right)^{\cos\delta_0}$$

Que es lo mismo que

$$m = Rtg\delta_0\left(\frac{tg\,\frac{\delta}{2}}{tg\,\frac{\delta_0}{2}}\right)^{\cos\delta_0}$$

Y junto con $\Delta\lambda' = \cos\delta_0\Delta\lambda$

Constituyen la Ley de la Proyección Cónica Conforme con un paralelo padrón.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Coeficientes de deformación

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Coeficientes de deformación

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Coeficientes de deformación

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{Rsen\,\delta} = \frac{\cos\delta_0}{Rsen\,\delta} Rtg\delta_0 \left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos\delta_0}$$

CONICA CONFORME DE LAMBERT

<u>Proyección cónica conforme con un paralelo padrón</u>

<u>Coeficientes de deformación</u>

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{Rsen\delta} = \frac{\cos\delta_0}{Rsen\delta} Rtg\delta_0 \left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos\delta_0} \Longrightarrow \alpha = \beta = \frac{sen\delta_0}{sen\delta} \left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos\delta_0}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Coeficientes de deformación

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{Rsen\,\delta} = \frac{\cos\delta_0}{Rsen\,\delta} Rtg\delta_0 \left(\frac{tg\dfrac{\delta}{2}}{tg\dfrac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos\delta_0} \Longrightarrow \alpha = \beta = \frac{sen\delta_0}{sen\delta} \left(\frac{tg\dfrac{\delta}{2}}{tg\dfrac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos\delta_0}$$

Coeficiente de deformación superficial:

CONICA CONFORME DE LAMBERT

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Coeficientes de deformación

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{Rsen\,\delta} = \frac{\cos\delta_0}{Rsen\,\delta} Rtg\delta_0 \left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos\delta_0} \Longrightarrow \alpha = \beta = \frac{sen\delta_0}{sen\delta} \left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos\delta_0}$$

Coeficiente de deformación superficial:

$$\mu = \alpha.\beta = \frac{sen^2\delta_0}{sen^2\delta} \left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_0}{2}} \right)^{2\cos\delta_0}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Algunas propiedades

1- La escala varía de forma continua al variar la latitud. No obstante, la escala en el paralelo y en el meridiano de cualquier punto es la misma, por lo que se conservan los ángulos. Esto es válido, estrictamente, en términos infinitesimales. La variación de escala por variación de la latitud implica, para términos finitos, variación en los ángulos. En la práctica, se considera la propiedad de conservación de los ángulos como verdadera también para áreas pequeñas.

2- Sobre el paralelo padrón, la escala es verdadera. A partir de él aumenta hacia el Ecuador, y disminuye hacia el polo. Estas variaciones de escala se tornan muy significativas a medida que nos apartamos de la latitud del paralelo padrón, por lo que esta proyección está limitada por la extensión en latitud del área a representar.

Por tanto, esta proyección es adecuada para la representación de regiones con pequeñas diferencias de latitud.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Cabe la posibilidad de exigir a la proyección que sean dos los paralelos representados sin deformación, los correspondientes a las colatitudes δ_1 y δ_2.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Cabe la posibilidad de exigir a la proyección que sean dos los paralelos representados sin deformación, los correspondientes a las colatitudes δ_1 y δ_2.

En ese caso, las ecuaciones de condición para establecer la Ley de la Proyección son dos, ya que para $\delta = \delta_1$ y $\delta = \delta_2$ debe cumplirse $\alpha = \beta = 1$.

CONICA CONFORME DE LAMBERT

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Cabe la posibilidad de exigir a la proyección que sean dos los paralelos representados sin deformación, los correspondientes a las colatitudes δ_1 y δ_2.

En ese caso, las ecuaciones de condición para establecer la Ley de la Proyección son dos, ya que para $\delta = \delta_1$ y $\delta = \delta_2$ debe cumplirse $\alpha = \beta = 1$.

Así que:

$$\frac{n.m_e}{R sen \delta_1}\left(tg\frac{\delta_1}{2}\right)^n = 1$$

$$\frac{n.m_e}{R sen \delta_2}\left(tg\frac{\delta_2}{2}\right)^n = 1$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Cabe la posibilidad de exigir a la proyección que sean dos los paralelos representados sin deformación, los correspondientes a las colatitudes δ_1 y δ_2.

En ese caso, las ecuaciones de condición para establecer la Ley de la Proyección son dos, ya que para $\delta = \delta_1$ y $\delta = \delta_2$ debe cumplirse $\alpha = \beta = 1$.

Así que:

$$\frac{n.m_e}{R sen\,\delta_1}\left(tg\frac{\delta_1}{2}\right)^n = 1$$

$$\frac{n.m_e}{R sen\,\delta_2}\left(tg\frac{\delta_2}{2}\right)^n = 1$$

El problema implica resolver este sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son *n* y m_e.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Luego de operar bastante, se llega a la Ley de la Proyección en función de δ_1 y en función de δ_2.

$$m = \frac{R sen\delta_1}{n}\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_1}{2}}\right)^n ; \Delta\lambda' = n\Delta\lambda$$

$$n = \frac{\log(sen\delta_1) - \log(sen\delta_2)}{\log\left(tg\frac{\delta_1}{2}\right) - \log\left(tg\frac{\delta_2}{2}\right)}$$

$$m = \frac{R sen\delta_2}{n}\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_2}{2}}\right)^n ; \Delta\lambda' = n\Delta\lambda$$

$$n = \frac{\log(sen\delta_1) - \log(sen\delta_2)}{\log\left(tg\frac{\delta_1}{2}\right) - \log\left(tg\frac{\delta_2}{2}\right)}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Luego de operar bastante, se llega a la Ley de la Proyección en función de δ_1 y en función de δ_2.

$$m = \frac{R sen \delta_1}{n} \left(\frac{tg \frac{\delta}{2}}{tg \frac{\delta_1}{2}} \right)^n ; \Delta\lambda' = n\Delta\lambda$$

$$n = \frac{\log(sen\delta_1) - \log(sen\delta_2)}{\log\left(tg \frac{\delta_1}{2}\right) - \log\left(tg \frac{\delta_2}{2}\right)}$$

$$m = \frac{R sen \delta_2}{n} \left(\frac{tg \frac{\delta}{2}}{tg \frac{\delta_2}{2}} \right)^n ; \Delta\lambda' = n\Delta\lambda$$

$$n = \frac{\log(sen\delta_1) - \log(sen\delta_2)}{\log\left(tg \frac{\delta_1}{2}\right) - \log\left(tg \frac{\delta_2}{2}\right)}$$

En esta proyección, el cono deja de ser tangente en el paralelo de colatitud δ_0, para ser secante en los paralelos de colatitudes δ_1 y δ_2.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

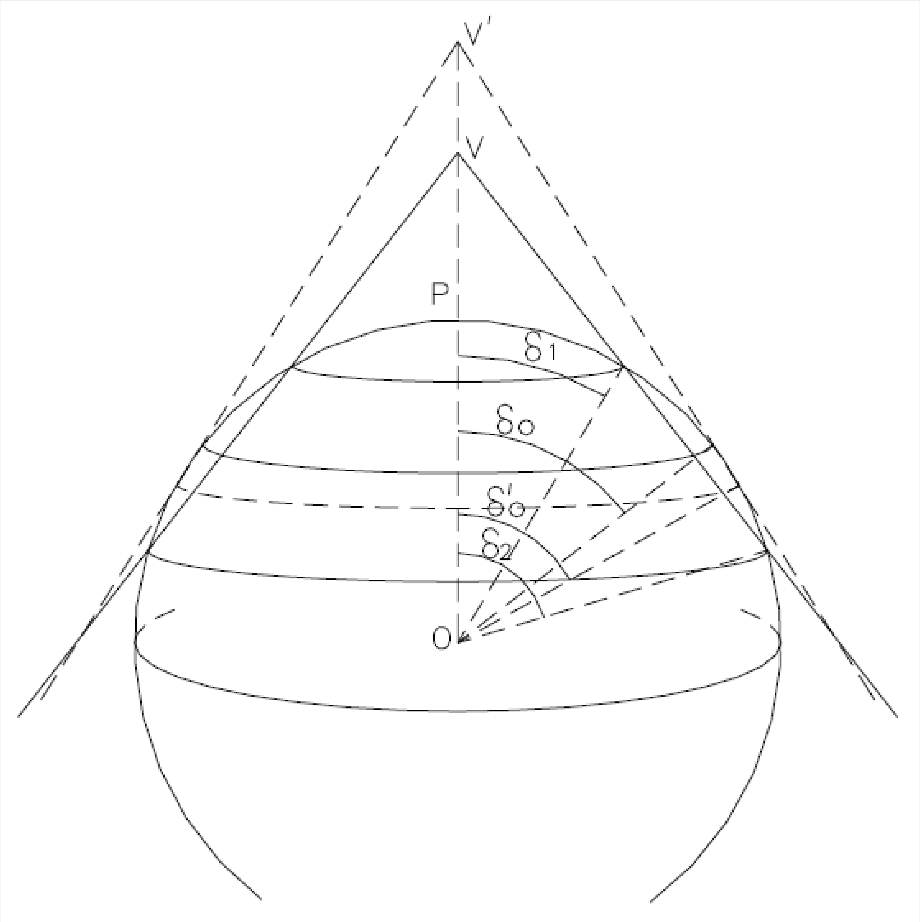
<u>Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón</u>

Lo vemos acá:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón</u>

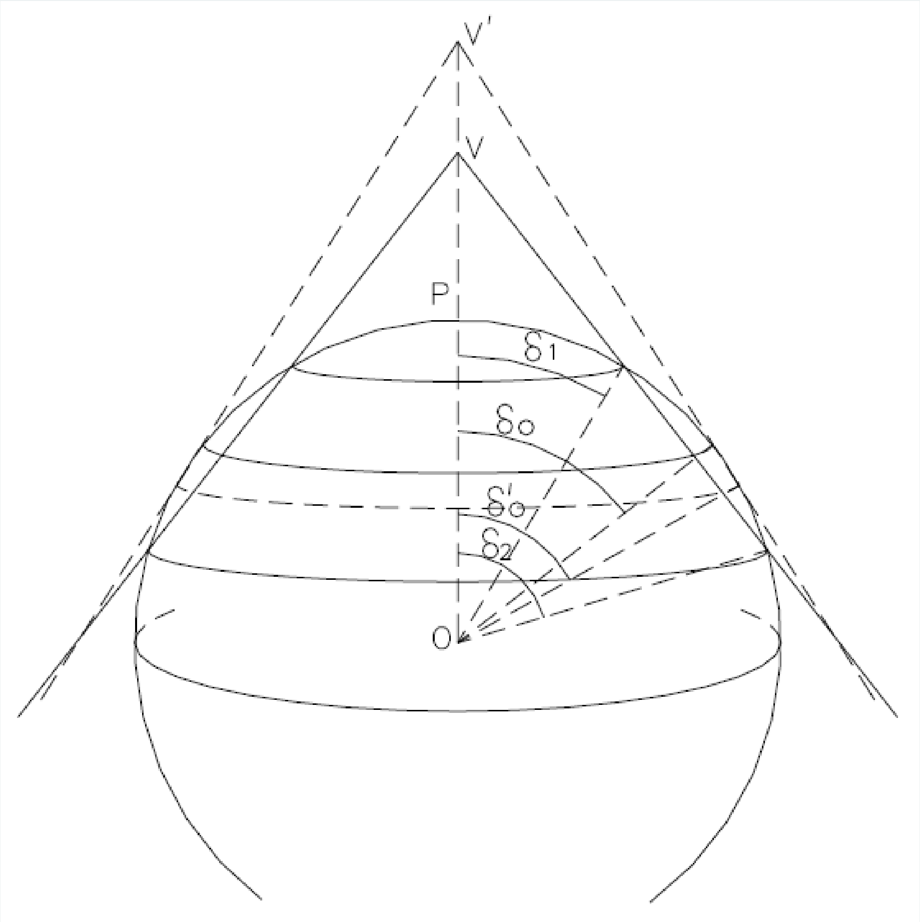
Lo vemos acá:



CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Lo vemos acá:

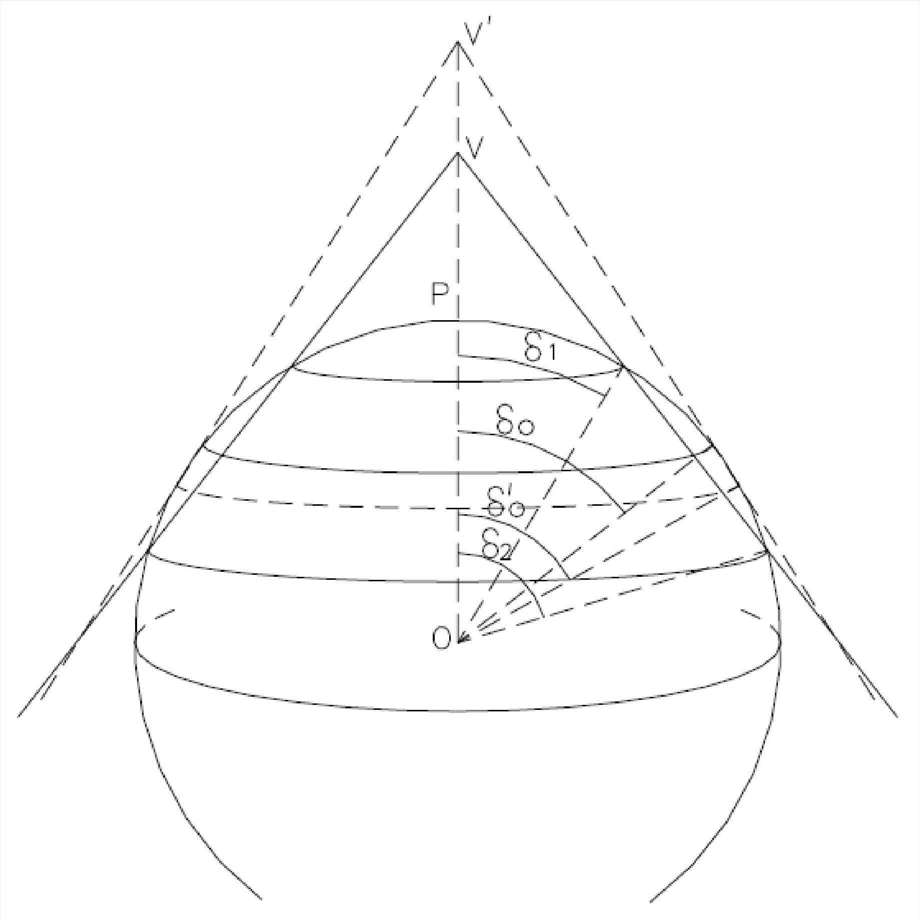


Generemos un cono ficticio (punteado en la imagen), tangente a la esfera en el paralelo δ_0‘, determinado por:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Lo vemos acá:



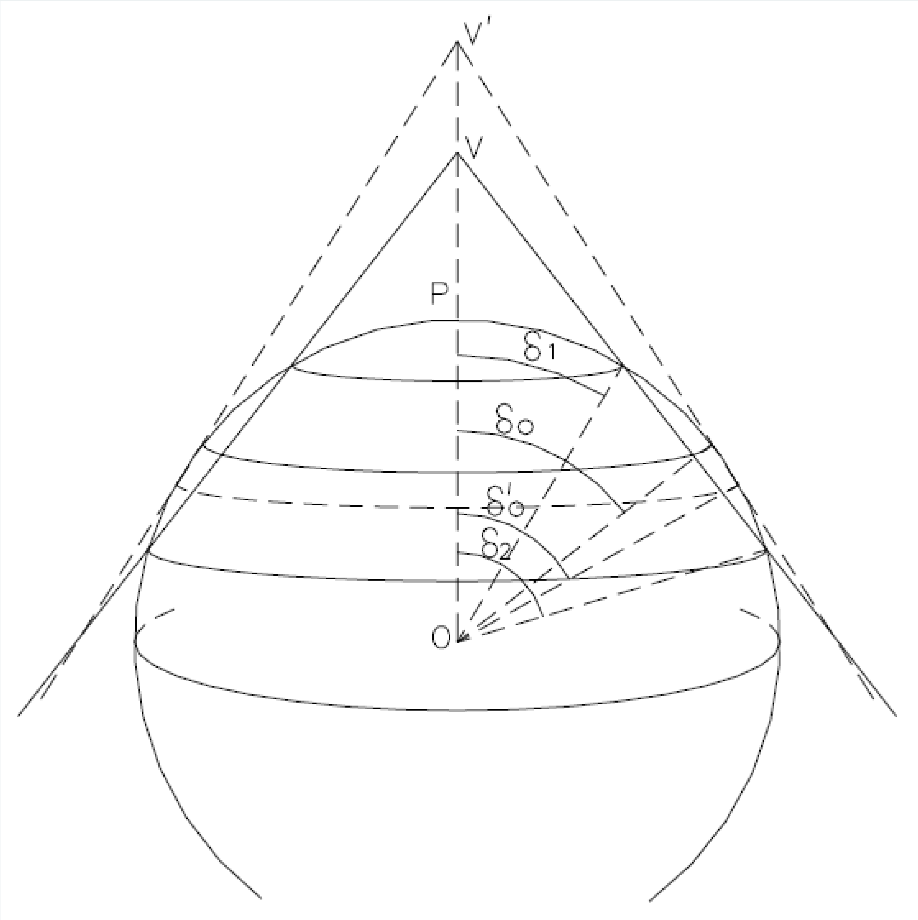
Generemos un cono ficticio (punteado en la imagen), tangente a la esfera en el paralelo δ_0‘, determinado por:

$$\cos\delta_0{}' = n = \frac{\log(sen\,\delta_1) - \log(sen\,\delta_2)}{\log\left(tg\,\frac{\delta_1}{2}\right) - \log\left(tg\,\frac{\delta_2}{2}\right)}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Lo vemos acá:



Generemos un cono ficticio (punteado en la imagen), tangente a la esfera en el paralelo δ_0‘, determinado por:

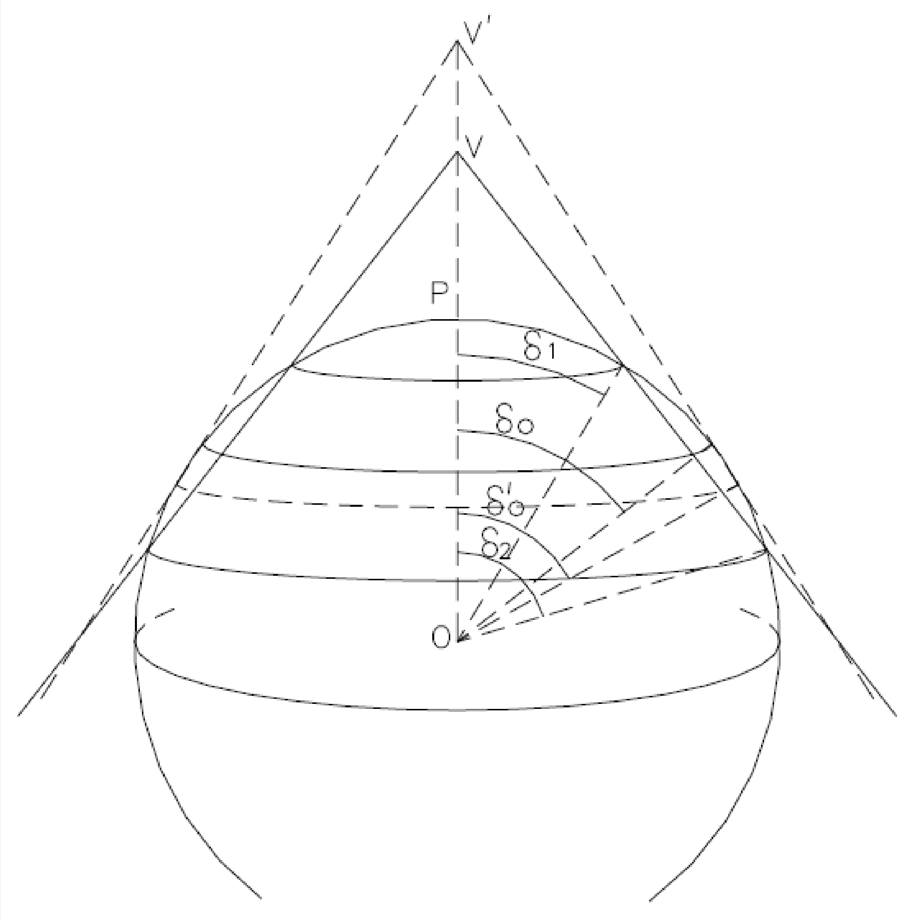
$$\cos\delta_0' = n = \frac{\log(sen\,\delta_1) - \log(sen\,\delta_2)}{\log\left(tg\,\frac{\delta_1}{2}\right) - \log\left(tg\,\frac{\delta_2}{2}\right)}$$

Finalmente, y en función de las expresiones cartesianas vistas antes:

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Lo vemos acá:



Generemos un cono ficticio (punteado en la imagen), tangente a la esfera en el paralelo δ_0‘, determinado por:

$$\cos\delta_0' = n = \frac{\log(sen\,\delta_1) - \log(sen\,\delta_2)}{\log\left(tg\,\frac{\delta_1}{2}\right) - \log\left(tg\,\frac{\delta_2}{2}\right)}$$

Finalmente, y en función de las expresiones cartesianas vistas antes:

$$E = x = m.sen(n\Delta\lambda)$$

$$N = y = Rtg\delta_0' - m.\cos(n\Delta\lambda)$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Coeficientes de deformación

CONICA CONFORME DE LAMBERT

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Coeficientes de deformación

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{Rsen\delta} = \frac{n}{Rsen\delta}\frac{Rsen\delta_1}{n}\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_1}{2}}\right)^n$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón</u>

<u>Coeficientes de deformación</u>

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{R sen\delta} = \frac{n}{R sen\delta}\frac{R sen\delta_1}{n}\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_1}{2}}\right)^n \Longrightarrow \alpha = \beta = \frac{sen\delta_1}{sen\delta}\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_1}{2}}\right)^n$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón</u>

<u>*Coeficientes de deformación*</u>

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{Rsen\delta} = \frac{n}{Rsen\delta}\frac{Rsen\delta_1}{n}\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_1}{2}}\right)^n \Longrightarrow \alpha = \beta = \frac{sen\delta_1}{sen\delta}\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_1}{2}}\right)^n$$

Coeficiente de deformación superficial:

CONICA CONFORME DE LAMBERT

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Coeficientes de deformación

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{R\,sen\,\delta} = \frac{n}{R\,sen\,\delta}\,\frac{R\,sen\,\delta_1}{n}\left(\frac{tg\,\frac{\delta}{2}}{tg\,\frac{\delta_1}{2}}\right)^n \Longrightarrow \alpha = \beta = \frac{sen\,\delta_1}{sen\,\delta}\left(\frac{tg\,\frac{\delta}{2}}{tg\,\frac{\delta_1}{2}}\right)^n$$

Coeficiente de deformación superficial:

$$\mu = \alpha\beta = \frac{sen^2\delta_1}{sen^2\delta}\left(\frac{tg\,\frac{\delta}{2}}{tg\,\frac{\delta_1}{2}}\right)^{2n}$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

<u>Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón</u>

<u>Coeficientes de deformación</u>

Coeficiente de deformación paralelo y meridiano:

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{R\,sen\,\delta} = \frac{n}{R\,sen\,\delta}\frac{R\,sen\,\delta_1}{n}\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_1}{2}}\right)^n \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{sen\,\delta_1}{sen\,\delta}\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_1}{2}}\right)^n$$

Coeficiente de deformación superficial:

$$\mu = \alpha\beta = \frac{sen^2\delta_1}{sen^2\delta}\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\delta_1}{2}}\right)^{2n}$$

Se verifica que tanto para $\delta = \delta_1$ como para $\delta = \delta_2$, $\alpha = \beta = 1$.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Algunas propiedades

1- La escala varía de forma continua al variar la latitud. No obstante, la escala en el paralelo y en el meridiano de cualquier punto es la misma, por lo que se conservan los ángulos. Esto es válido, estrictamente, en términos infinitesimales. La variación de escala por variación de la latitud implica, para términos finitos, variación en los ángulos. En la práctica, se considera la propiedad de conservación de los ángulos como verdadera también para áreas pequeñas.

2- Sobre los paralelos padrones, la escala es verdadera ($\alpha = \beta = 1$). Entre los paralelos padrones, la escala sobre los paralelos y sobre los meridianos es reducida, pero conservando la igualdad entre ellas. Fuera de la faja definida por los paralelos padrón, la escala sobre los paralelos y los meridianos es ampliada, pero también manteniendo la igualdad entre ellas.

3- Esta proyección presenta gran precisión en cuanto a la escala. A modo de ejemplo consideremos la representación de una faja con una extensión de 25º en latitud ($24º \leq \varphi \leq 49º$), con los paralelos padrones correspondientes a $\varphi_1=45º$ y $\varphi_2=33º$. En estas condiciones, y de la aplicación de las expresiones desarrolladas hasta ahora, los coeficientes de deformación en los paralelos extremos 24º y 49º son respectivamente, 1.0276 y 1.0104. El error en escala será entonces de 2.76% en el límite Sur y de 1.04% en el límite Norte. Entre los paralelos padrones, el error máximo será del orden del 0.5%.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrón

Algunas propiedades

4- Se representan los círculos máximos, aproximadamente, como líneas rectas. A pesar de ser apenas una aproximación (porque sabemos que solamente en la proyección plana gnómica los círculos máximos son exactamente representados por líneas rectas), esto es suficiente para diversas finalidades prácticas. De este modo, la proyección cónica conforme de Lambert con esa propiedad, junto con la de la conformidad y la gran precisión de escala, permite resolver, con precisión y rapidez, los problemas de distancia y dirección.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme considerando la Tierra como un elipsoide

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme considerando la Tierra como un elipsoide

La deducción de las fórmulas seguirá un proceso en todo similar al desarrollado anteriormente. En este caso consideraremos a la Tierra representada no por una esfera sino por un elipsoide de revolución cuyos radios de curvatura principales son ρ y N, y la excentricidad es e.

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme considerando la Tierra como un elipsoide

La deducción de las fórmulas seguirá un proceso en todo similar al desarrollado anteriormente. En este caso consideraremos a la Tierra representada no por una esfera sino por un elipsoide de revolución cuyos radios de curvatura principales son ρ y *N*, y la excentricidad es *e*.

Operando, se llega a:

$$m = m_0 \left[tg \frac{\delta}{2} \left(\frac{1 - e\cos\delta}{1 + e\cos\delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\cos\delta_0} \quad ; \quad d\lambda' = d\lambda \cos\delta_0$$

CONICA CONFORME DE L A M B E R T

Proyección cónica conforme considerando la Tierra como un elipsoide

La deducción de las fórmulas seguirá un proceso en todo similar al desarrollado anteriormente. En este caso consideraremos a la Tierra representada no por una esfera sino por un elipsoide de revolución cuyos radios de curvatura principales son ρ y *N*, y la excentricidad es *e*.

Operando, se llega a:

$$m = m_0 \left[tg \frac{\delta}{2} \left(\frac{1 - e\cos\delta}{1 + e\cos\delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\cos\delta_0} \quad ; \; d\lambda' = d\lambda \cos\delta_0$$

Que es la Ley de la Proyección.