Modelos Estadísticos para la Regresión y la Clasificación

Práctico 7 - Componentes Principales

Micaela Long

Instituto de Matemática y Estadística Prof. Rafael Laguardia (IMERL)
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

9 de octubre de 2024

Práctico 7
Componentes Principales

Material para hacer práctico 7 (disponible en EVA):

- Teóricos Análisis Componentes Principales (Tema 8)

Será de utilidad tener a mano el libro :
"An Introduction to Statistical Learning with Applications in R"

o su versión en Python:
"An Introduction to Statistical Learning with Applications in Python"

Ambos pueden ser descargados aquí: `https://www.statlearning.com/`

Análisis de Componentes Principales (PCA)

Si quiero bajar de 3 a 2 dimensiones y perder la menor cantidad de informacion posible:

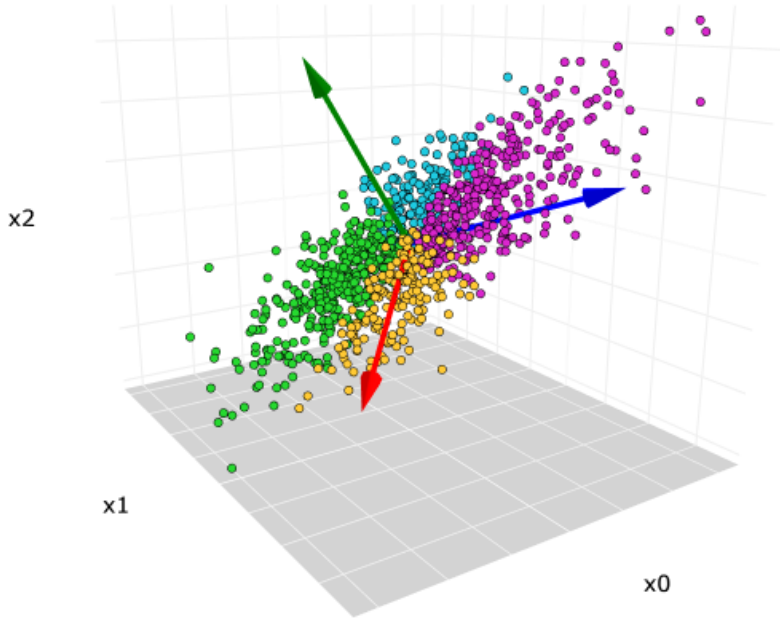


Figura: towardsdatascience.com

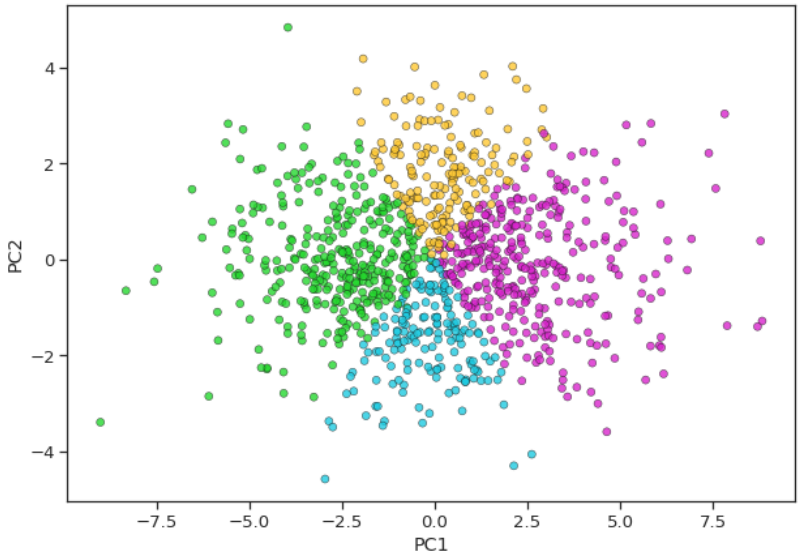
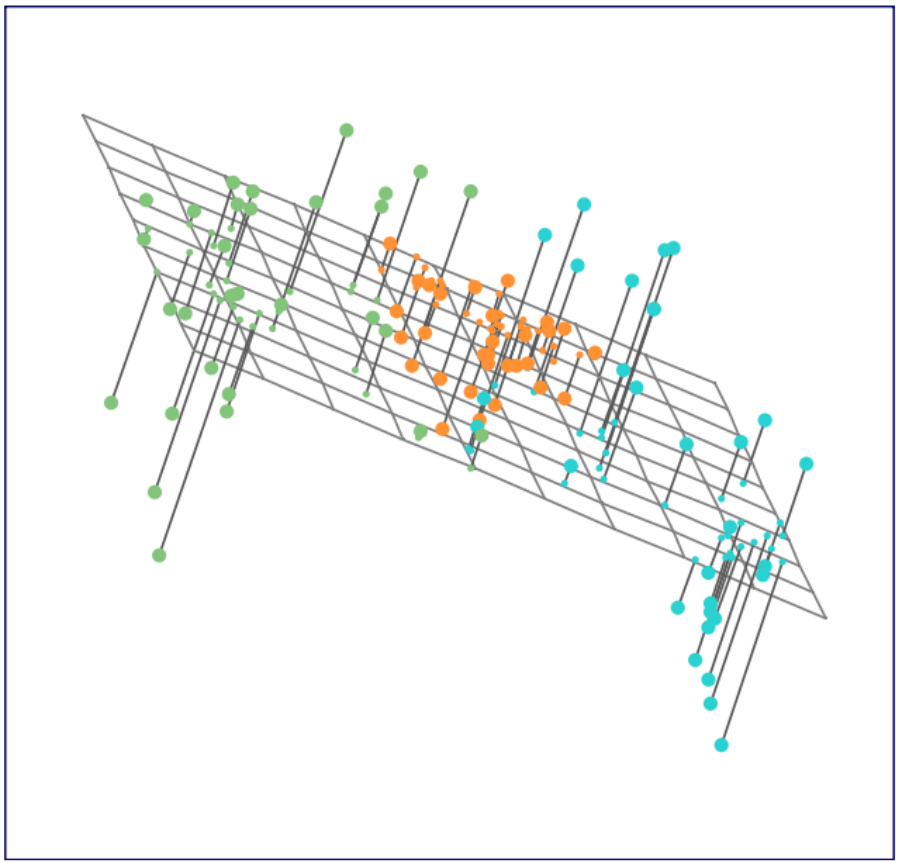


Figura: towardsdatascience.com

Análisis de Componentes Principales (PCA)

Si quiero bajar de 3 a 2 dimensiones y perder la menor cantidad de informacion posible:



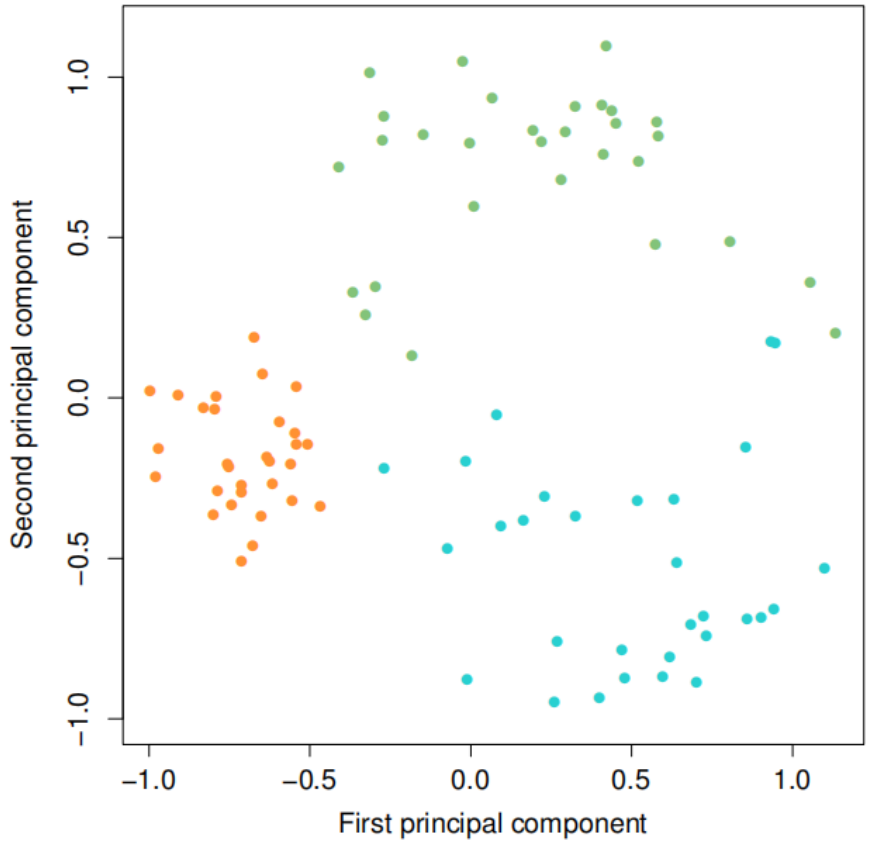


Figura: https://www.statlearning.com/

PCA

- El Análisis de Componentes Principales (PCA) es una técnica que en general se utiliza para reducir la dimensionalidad.
- Transforma a las variables originales en componentes principales (combinaciones lineales de las primeras)
- Las componentes principales (PC) capturan la mayor parte de la varianza en los datos, y son ortoganales
- Los componentes principales se ordenan por la cantidad de varianza que explican:
  1. PC1 es la dirección en el espacio de los datos que captura la mayor cantidad de varianza posible en los datos.
  2. PC2 es la segunda dirección más importante, que es ortogonal a PC1.
  3. PC3 es la tercera, ortogonal a PC1 y PC2, y así sucesivamente.

Análisis de Componentes Principales (PCA)

X_1, X_2, X_3 variables originales.

Si quiero considerar menos dimensiones, una forma inteligente es considerar

Análisis de Componentes Principales (PCA)

X_1, X_2, X_3 variables originales.

Si quiero considerar menos dimensiones, una forma inteligente es considerar

$$Z_1 = z_{11}X_1 + z_{12}X_2 + z_{13}X_3$$

A Z_1 le llamamos componente principal.

Análisis de Componentes Principales (PCA)

X_1, X_2, X_3 variables originales.

Si quiero considerar menos dimensiones, una forma inteligente es considerar

$$Z_1 = z_{11}X_1 + z_{12}X_2 + z_{13}X_3$$

A Z_1 le llamamos componente principal.

Queremos $z_1 = (z_{11}, z_{12}, z_{13})$ de forma tal que maximiza la varianza

$$z_1 = \arg \max_{\|z_1\|^2=1} \mathrm{Var}(Z_1)$$

Se prueba que z_1 es el vector propio asociado al valor propio más grande de S la matriz de varianzas y covarianzas.

Análisis de Componentes Principales (PCA)

X_1, X_2, X_3 variables originales.

Si quiero considerar menos dimensiones, una forma inteligente es considerar

$$Z_1 = z_{11}X_1 + z_{12}X_2 + z_{13}X_3$$

A Z_1 le llamamos componente principal.

Queremos $z_1 = (z_{11}, z_{12}, z_{13})$ de forma tal que maximiza la varianza

$$z_1 = \arg \max_{\|z_1\|^2=1} \mathrm{Var}(Z_1)$$

Se prueba que z_1 es el vector propio asociado al valor propio más grande de S la matriz de varianzas y covarianzas.

Luego

$$Z_2 = z_{21}X_1 + z_{22}X_2 + z_{23}X_3$$

donde $z_2 = (z_{21}, z_{22}, z_{23})$

$$z_2 = \arg \max_{\substack{\|z_2\|^2=1 \\ z_1 \perp z_2}} \mathrm{Var}(Z_2)$$

que es el vector propio asociado al segundo valor propio más grande de S la matriz de varianzas y covarianzas.

Y lo mismo para Z_3.

Ejercicio 2

Consideramos la siguiente matriz de datos:

	x_1	x_2	x_3
$\mathbf{x_1}$	1	0	0
$\mathbf{x_2}$	1	2	0
$\mathbf{x_3}$	2	2	2
$\mathbf{x_4}$	0	0	2

1. Centrar y reducir la matriz.
2. Calcular la matriz de varianzas-covarianzas, sus valores propios y vectores propios.
3. Completar la tabla siguiente:

	Z_1	Z_2	Z_3	cal Z_1	cal Z_2	cal Z_3	ctr Z_1	ctr Z_2	ctr Z_3
$\mathbf{x_1}$									
$\mathbf{x_2}$									
$\mathbf{x_3}$									
$\mathbf{x_4}$									

   donde cal Z_i es la calidad sobre el eje i (en %), y ctr Z_i es la contribución a la construcción del eje i (en %).
4. Hacer la representación gráfica de los individuos sobre el plano dado por Z_1 y Z_2.

Ejercicio 2

	x_1	x_2	x_3
$\mathbf{x_1}$	1	0	0
$\mathbf{x_2}$	1	2	0
$\mathbf{x_3}$	2	2	2
$\mathbf{x_4}$	0	0	2

1. Filas $->$ observaciones
2. Columnas $->$ variables $->$ queremos estandarizarlas

$$\mu_{x_1} = \frac{1+1+2+0}{3} = 1$$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\frac{(1-1)^2+(1-1)^2+(2-1)^2+(0-1)^2}{3}} = 0{,}816$$

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline \mathbf{x_1} & \frac{1-1}{0{,}816} & - & - \\ \hline \mathbf{x_2} & \frac{1-1}{0{,}816} & - & - \\ \hline \mathbf{x_3} & \frac{2-1}{0{,}816} & - & - \\ \hline \mathbf{x_4} & \frac{0-1}{0{,}816} & - & - \\ \hline \end{array}$$

Completar el resto de las columnas!

Ejercicio 2

Y es la matriz centrada y reducida:

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1-1}{0,816} & - & - \\ \frac{1-1}{0,816} & - & - \\ \frac{2-1}{0,816} & - & - \\ \frac{0-1}{0,816} & - & - \end{pmatrix}$$

La matriz de variazas y covarianzas es

$$S = \frac{1}{3} Y^T Y$$

Hay que hallar valores propios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ *y los vectores propios asociados* a_1, a_2, a_3 *de* S.

$$Z_1 = Ya_1$$

- Z_1 es la primera componente principal.
- Maximiza la varianza y es una combinación lineal de las variables originales.
- Se calcula mediante la proyección de los datos sobre el primer vector propio de la matriz de covarianzas.