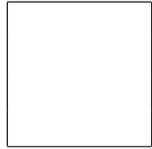


EXAMEN  
16 DE JULIO DE 2012



No. Examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

### Ejercicio 1

- Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se considera  $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(\alpha) = 0\}$  y  $S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \text{ es antisimétrica}\}$ .
  - Probar que  $S_1$  y  $S_2$  son subespacios vectoriales.
  - Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando en cada caso:  
Sea  $T : S_1 \rightarrow S_2$  transformación lineal.
    - $\exists p_1, p_2 \in S_1 / T(p_1) = T(p_2)$
    - $\dim(\ker(T)) > \dim(\text{Im}(T))$ .
    - $T$  es invertible.
    - $\exists! T / T(x - \alpha) = T(x(x - \alpha)) = 0$
- Probar que si  $T : V \rightarrow W$  es transformación lineal y  $V, W$  de dimensión finita, entonces  $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$ .

### Ejercicio 2

- Sean  $A = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ , probar que  $A$  es l.d. si existe  $v_r \in A$  tal que  $v_r$  es c.l. de los restantes.
- Sea  $A = \{(1, 2, 0), (\alpha, 0, 1), (1, 0, \alpha)\}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
  - Estudiar la dependencia lineal de  $A$  discutiendo según  $\alpha$ .
  - Para  $\alpha = -1$ :
    - Hallar las ecuaciones paramétricas y reducidas de  $\pi$  tal que  $\pi \parallel \langle A \rangle$ ,  $P = (1, 1, 1) \in \pi$ .
    - Sea  $r) \begin{cases} x + 3z & = & 0 \\ y - z - 1 & = & 0 \end{cases}$  Hallar  $r \cap \pi = \{Q\}$ .
    - Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de  $s$  tal que  $s \perp \pi$ ,  $s \cap \pi = \{P\}$ .
    - Sea  $\{T\} = r \cap s$ . Clasificar según sus lados el triángulo  $\triangle(PQS)$  y calcular su área.

### Ejercicio 3

Sea  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(e_1) = (1, 2, -2)$ ,  $T(-1, 2, 1, 0) = (0, 1, 0)$ ,  $T(e_4) = (0, 0, 3)$ ,  $T(1, 0, 2, 0) = (1, 1, 2)$ .

- Hallar la expresión general de  $T$ .
- Hallar  $\ker(T)$  e  $\text{Im}(T)$  y su matriz asociada en las bases canónicas.
- Encontrar la matriz asociada a  $T$  en las bases  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 2, 0)\}$  y  $\mathcal{D} = \{(1, 1, 2), (1, 2, -2), (0, 0, 3)\}$  mediante cambios de base.