Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Geometría y Álgebra Lineal 1 - Anual
Curso 2011

Examen
16 de Julio de 2012

No. Examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Ejercicio 1

1. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se considera $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(\alpha) = 0\}$ y $S_2 = \{A \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \text{ es antisimétrica}\}$.
   a) Probar que S_1 y S_2 son subespacios vectoriales.
   b) Indicar si las siguiente afirmaciones son verdaderas o falsas justificando en cada caso:
   Sea $T : S_1 \to S_2$ transformación lineal.
      1) $\exists\, p_1, p_2 \in S_1 \;/\; T(p_1) = T(p_2)$
      2) $\dim(\ker(T)) > \dim(Im(T))$.
      3) T es invertible.
      4) $\exists!\, T \;/\; T(x - \alpha) = T(x(x - \alpha)) = 0$
2. Probar que si $T : V \to W$ es transformación lineal y V, W de dimensión finita, entonces $\dim(V)$ =$\dim(\ker(T)$+$\dim(Im(T))$.

Ejercicio 2

1. Sean $A = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$, probar que A es l.d sii existe $v_r \in A$ tal que v_r es c.l. de los restantes.
2. Sea $A = \{(1, 2, 0), (\alpha, 0, 1), (1, 0, \alpha)\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   a) Estudiar la dependencia lineal de A discutiendo según α.
   b) Para $\alpha = -1$:
      1) Hallar las ecuaciones paramétricas y reducídas de π tal que $\pi \parallel \langle A\rangle, P = (1, 1, 1) \in \pi$.
      2) Sea $r)\begin{cases} x + 3z & = & 0 \\ y - z - 1 & = & 0 \end{cases}$ Hallar $r \cap \pi = \{Q\}$.
      3) Hallar ecuaciones paramétricas y reducídas de s tal que $s \perp \pi,\ s \cap \pi = \{P\}$.
      4) Sea $\{T\} = r \cap s$. Clasificar según sus lados el triángulo $\triangle(PQS)$ y calcular su área.

Ejercicio 3

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(e_1) = (1, 2, -2),\ T(-1, 2, 1, 0) = (0, 1, 0),\ T(e_4) = (0, 0, 3),\ T(1, 0, 2, 0) = (1, 1, 2)$.

1. Hallar la expresión general de T.
2. Hallar $\ker(T)$ e $Im(T)$ y su matriz asociada en las báses canónicas.
3. Encontrar la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 2, 0)\}$ y $\mathcal{D} = \{(1, 1, 2), (1, 2, -2), (0, 0, 3)\}$ mediante cambios de base.