Universidad de la República
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística

Geometría y Álgebra Lineal 1 - Anual
Curso 2011

EXAMEN
31 DE ENERO DE 2012

No. Examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Ejercicio 1

1. Se consideran las rectas $r, s, t \subset \mathbb{R}^3$ tales que $P = (1,1,1),\ Q = (0,0,2) \in r$.
   $s : (1,0,1/3) + \lambda(-1/2, 2, 1/2)$ y $t : \begin{cases} y = -2 \\ -x + z = -4 \end{cases}$
   a) Hallar la ecuación de un plano π tal que $r \subset \pi,\ s \parallel \pi$.
   b) Hallar $t \cap \pi = \{A\}$ y la ecuación de un plano α tal que $t \subset \alpha$ y $\alpha \perp \pi$.
   c) Calcular el ángulo formado entre t y π.
   Hallar $B \in t$ tal que $\|\vec{AB}\| = 5$ y $d(B, \pi)$.
2. *a*) Definir subespacio vectorial.
   b) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar que $\ker(T)$ e $Im(T)$ sun subespacios vectoriales de V y W respectivamente.

Ejercicio 2

1. Sea $S = \{p \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $p(1) = p(-1) = 0\}$.
   a) Probar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$, hallar una base de S e indicar su dimensión.
   b) Sea $W = \langle x + 2, 1/2 \rangle$. Probar que $\mathbb{R}_2[x] = S \bigoplus W$.
   c) Hallar $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que $S = \ker(T),\ T(x+2) = 3x + 6,\ T(1/2) = 1/2$. Hallar $\dim Im(T)$.
   (*Sugerencia*: Hallar ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B}$ elegida adecuadamente.)
2. Sea V un espacio vectorial, $J_1, J_2 \subset V$ tal que $J_1 \subset J_2$.
   Probar que $\langle J_1 \rangle \subset \langle J_2 \rangle$. Deducir que si $J_1 \subset J_2$ y $\langle J_1 \rangle = V$, se tiene que $\langle J_2 \rangle = V$.

Ejercicio 3

Se considera $T : \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (b+c)x + d - a$$

1. Probar que T es una transformación lineal.

2. Hallar ${}_{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{C}}$ donde $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son la bases canónicas de $\mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente. Hallar además ${}_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}' = \{1, x+1, x^2+x+1\}$, mediante matrices de cambio de base.

3. Hallar $\ker(T)$, $Im(T)$, verificar que se cumple el teorema de las dimensiones y clasificar T (inyectiva, sobreyectiva, biyectiva).

4. Sea $\mathcal{C}''$ la base canónican de $\mathbb{R}^2$. $S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$ {}_{\mathcal{C}''}[S]_{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} $$

   Hallar $S \circ T$.